# Один из методов отбора корней при решении тригонометрических уравнений

**Зоя Григорьевна Гончарова**
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики
Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева
Москва, Россия
zgoncharova@mail.ru
0000-0003-1120-9195

**Татьяна Юрьевна Дёмина**
старший преподаватель кафедры высшей математики
Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева
Москва, Россия
tatdemina@mail.ru
0000-0003-2079-5173

**Елена Валентиновна Неискашова**
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики
Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева
Москва, Россия
neiskashova@rgau-msha.ru
0000-0001-8491-7649

**Виктор Вадимович Демин**
учитель математики и информатики
ГБОУ г. Москвы «Школа №218»
Москва, Россия
demin-viktor@mail.ru
0000-0002-5397-8016

Поступила в редакцию 15.02.2021
Принята 21.03.2021
Опубликована 11.05.2021

10.25726/r7854-2774-0932-h

**Аннотация**

При подготовке учащихся 10-11 классов к профильному ЕГЭ по математике возникают трудности при отборе корней тригонометрического уравнения, которые принадлежат заданному промежутку. Существует несколько методов отбора корней, но идеального не существует – у каждого из этих методов есть свои слабые стороны. Мы хотим предложить метод, который, на наш взгляд, позволяет учащимся более успешно производить отбор корней в тригонометрических уравнениях. В школьном курсе математики для отбора корней чаще всего используются тригонометрический круг или отбор корней с помощью двойного неравенства, определяющего заданный промежуток. Ситуация в реальных заданиях усложняется тем, что заданный диапазон для значений корней выходит за рамки одного круга. Это обстоятельство усложняет отбор корней на самой окружности, т.к. требует от учащихся более сложной ориентации на ней. Если значение корня не может быть явно записано в радианной мере, то отбор корней с помощью двойного неравенства становится проблематичным. Экзаменационная работа по математике базового уровня состоит из одной части, включающей 20 заданий с кратким ответом. Все задания направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения

математических знаний в повседневных ситуациях. Ответом к каждому из заданий 1-20 является целое число, конечная десятичная дробь, или последовательность цифр.

**Ключевые слова**
Отбор корней, ЕГЭ, математика, учащиеся, задания.

## Введение

Задание с кратким ответом считается выполненным, если верный ответ записан в бланке ответов №1 в той форме, которая предусмотрена инструкцией по выполнению задания.

ЕГЭ по математике-основная дисциплина, которая кажется всеми выпускниками. Экзаменационное испытание делится на два уровня - базовый и профильный. Второй нужно только тем, кто планирует сделать математику основным предметом изучения в высшем учебном заведении. Базовый уровень сдают все остальные. Цель данное испытание-проверить уровень умений и знаний учащихся-выпускников на соответствие нормам и стандартам. Деление на профильный и базовый уровни впервые использовалось в 2017 году, чтобы ученики, которым не нужна углубленная математика для поступления в ВУЗ, не тратили время на подготовку к сложным заданиям.

Подготовка включает повторение школьной программы по алгебре и геометрии. Задания в ЕГЭ базового уровня доступны школьникам с разным уровнем знаний. Базовый уровень могут сдать школьники, которые были просто внимательны на уроках.

Основные рекомендации по подготовке такие:

Систематическую подготовку стоит начинать заблаговременно, чтобы не пришлось нервничать, осваивая все задания за 1-2 месяца до экзамена. Период, необходимый для качественной подготовки, зависит от исходного уровня знаний.

## Материалы и методы исследования

В свое время велась ожесточенная дискуссия по поводу определения понятия тригонометрическое уравнение. Тригонометрическим предлагали называть:

– уравнение, в котором переменная входит лишь под знак тригонометрической функции (в таком случае уравнения вида sin x+x=0 не принадлежит к тригонометрических; его предлагали называть трансцендентным);

– уравнение, в котором переменная входит под знак тригонометрической функции.

По этому поводу следует согласиться с мнением С. И. Новоселова, который считал, что различия в обозначениях тригонометрического уравнения не являются принципиальными. Важно одно – нет общего метода решения тригонометрических уравнений. Следует подчеркнуть принципиальную различия тригонометрических уравнений от алгебраических: тригонометрические уравнения, в которых переменная входит лишь под знак тригонометрической функции, или совсем не имеющие решений или имеющие их множество. Это связано со свойством периодичности тригонометрических функций.

Тригонометрическими уравнениями называются уравнения, в которых неизвестная (переменная) входит лишь под знак тригонометрической функции.

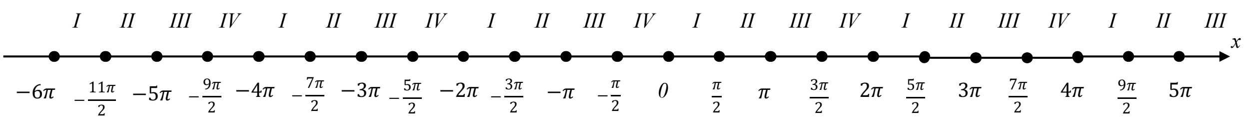
Например: $\sin x - \cos x = 0$; $2\sin x+\cos x = \sin2 2x$; $\cos 4x\cos 2x = \cos 5x$; $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

В курсе математики тригонометрические уравнения рассматриваются на множестве действительных чисел. При решении тригонометрических уравнений сначала нужно определить область допустимых значений неизвестного, учитывая, что функции cos x и sin x определены при всех действительных значениях x, функция tg x определена при x π π (2K + 1) / 2, где k ∈ Z, и функция ctg x определена при, x π πk, k∈Z.

Общего метода решения тригонометрических уравнений не существует, и поиск решения в каждом конкретном случае требует определенного мастерства в выполнении тригонометрических преобразований, знания тригонометрических формул. Нужно отметить, что при решении простейших тригонометрических уравнений запись решений имеет однозначную форму. В более сложных примерах форма записи множества решений неоднозначна, но идентичность различных форм записи всегда можно доказать с помощью тождественных преобразований. Различная форма записи объясняется различными методами, с помощью которых решается данная задача. Решение различных типов тригонометрических уравнений в основном сводится к решению простейших тригонометрических уравнений.

## Результаты и обсуждение

В основе нашего метода лежит следующая идея. На координатной прямой задается единичный отрезок удобной длины. Длина и количество единичных отрезков на прямой определяется заданным диапазоном значений для корней. Один единичный отрезок обозначает одну координатную четверть. Далее проводится нумерация единичных отрезков в нужном направлении. Эта нумерация содержит в себе указание радианной меры для координатных четвертей и номер координатной четверти. Примерный вид полученного рисунка:




Далее на полученном рисунке указывается начальное значение исследуемой серии корней тригонометрического уравнения и выделяется заданный диапазон. После этого проводится перемещение начального значения в сторону заданного диапазона с учетом значения слагаемого, отвечающего за периодичность корней полученной серии решений.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих применение этого метода на практике.

**Пример 1.**

а) Решите уравнение $6\cos^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

*Решение:*

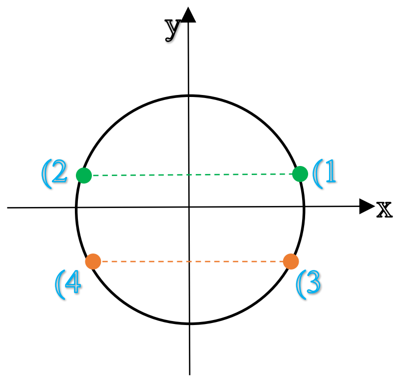
а) С учетом формул приведения и основного тригонометрического тождества, получаем следующее выражение:

$$6\left(1-\sin^2 x\right) - \sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow 6\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

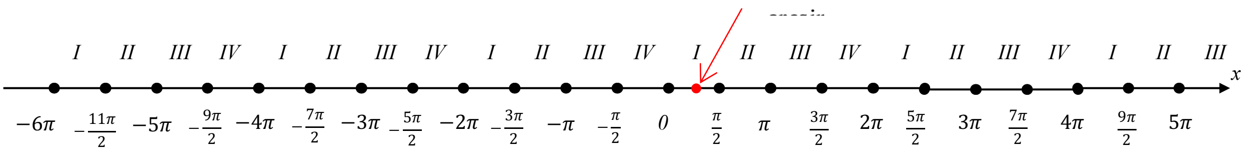
Далее имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, & (1) \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, & (2) \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & (3) \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n & (4) \end{array}\right. \quad n \in Z$$

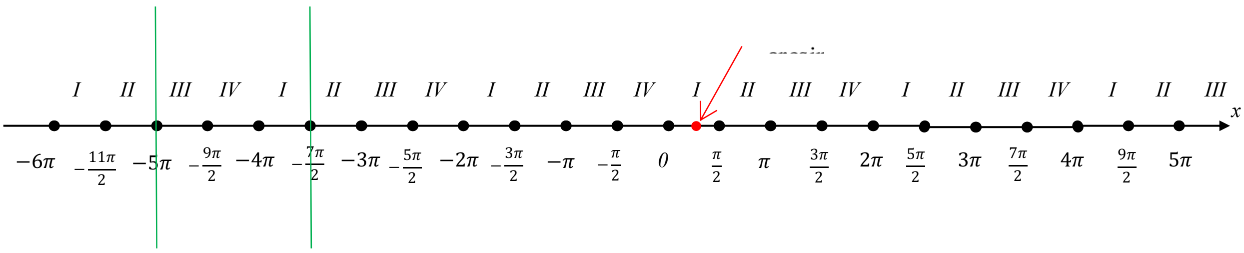
На тригонометрической окружности эти серии будут расположены следующим образом:




б) При помощи координатной прямой произведем отбор корней серии решений (1), принадлежащих отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$. Как показывает практика, учащиеся достаточно уверенно определяют принадлежность корней координатным четвертям в диапазоне $[0;2\pi]$. Значение $ar\sin\frac{1}{3}$ находится в первой координатной четверти $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

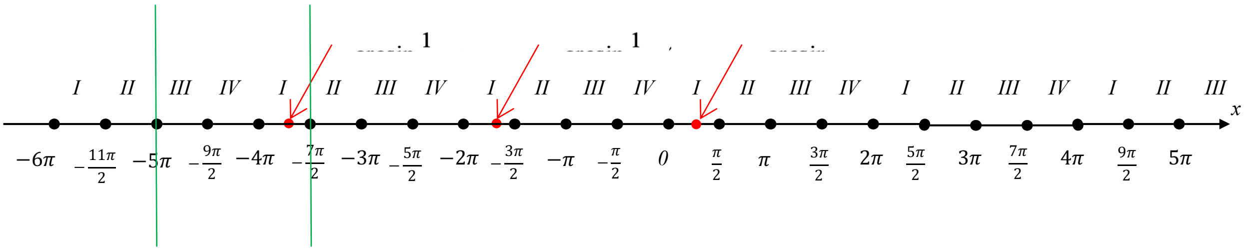


Далее выделяем заданный отрезок $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.



Теперь обращаемся к слагаемому $2\pi n$ серии решений (1). На основе полученного рисунка легко определить, что начальное значение $\arcsin\frac{1}{3}$ серии (1) необходимо смещать в отрицательном направлении. С учетом полученной периодичности корней (слагаемое $2\pi n$) получаем, что корни этой серии будут расположены в первых четвертях соответствующих единичных отрезков координатной прямой. Каждый следующий корень будет получаться из предыдущего вычитанием полученного периода.

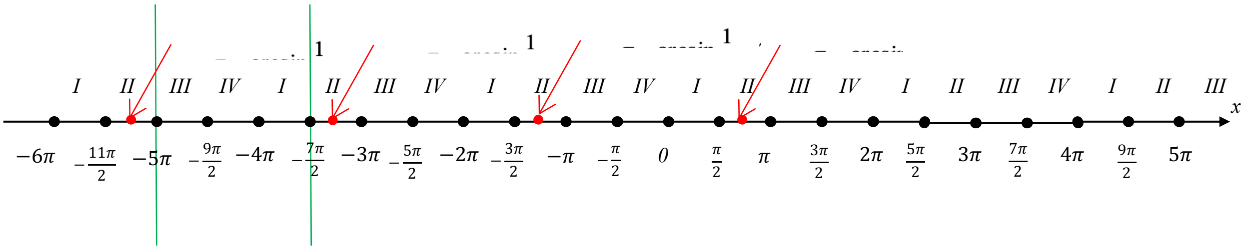
Серия решений (1)




На основании полученного рисунка можно сделать вывод, что из серии решений (1) заданному промежутку принадлежит только один корень $\arcsin\frac{1}{3}-4\pi$.

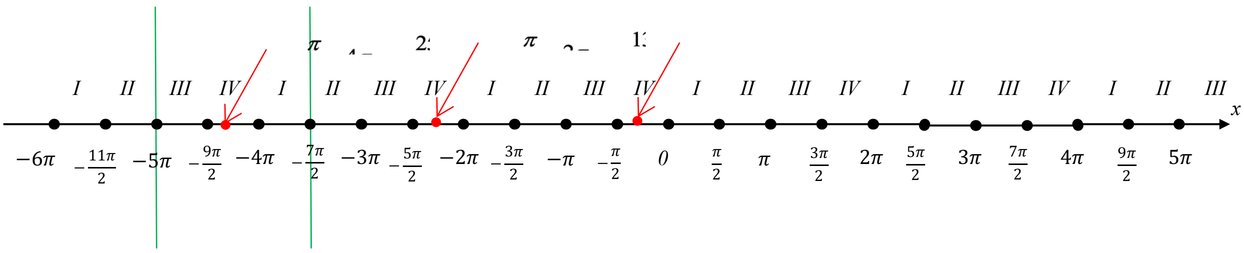
Проведем аналогичные рассуждения для оставшихся серий решений. Для наглядности для каждой серии будем использовать отдельный рисунок.

Серия решений (2)



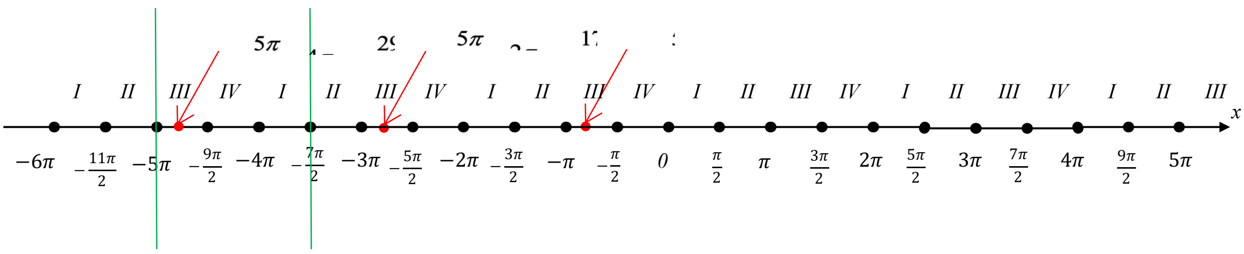

Вывод: серия решений (2) не содержит корней, принадлежащих данному отрезку.

Серия решений (3)




Вывод: $-\frac{25\pi}{6}\in\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Серия решений (4)



Вывод: $-\dfrac{29\pi}{6}\in\left[-5\pi;-\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

В итоге получаем следующие корни: $\arcsin\dfrac{1}{3}-4\pi;\ -\dfrac{25\pi}{6};\ -\dfrac{29\pi}{6}$.

*Ответ:* а) $\left\{\arcsin\dfrac{1}{3}+2\pi n;\pi-\arcsin\dfrac{1}{3}+2\pi n;-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n : n\in Z\right\}$;

б) $\arcsin\dfrac{1}{3}-4\pi;\ -\dfrac{25\pi}{6};\ -\dfrac{29\pi}{6}$.

**Пример 2.**

а) Решите уравнение $2\sin x-10\cos x+tgx=5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

*Решение:*

а) В начале отметим, что данное уравнение имеет смысл при $\cos x\neq 0$, т.е. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$. С учетом этих ограничений умножим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем:

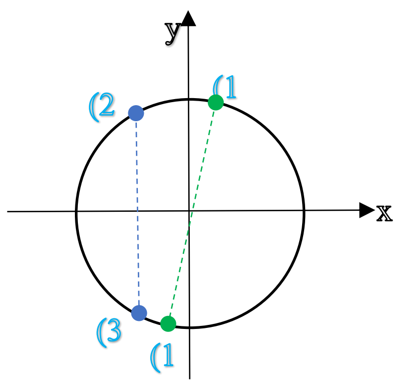
$$2\sin x\cos x-10\cos^2 x+\sin x-5\cos x=0$$

$$2\cos x(\sin x-5\cos x)+(\sin x+5\cos x)=0$$

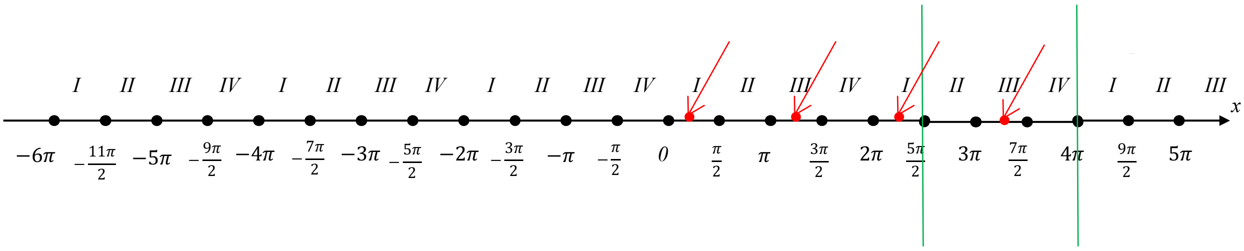
$$(\sin x-5\cos x)(2\cos x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x-5\cos x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}tgx=5\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=arctg5+\pi n, & (1)\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, & (2)\qquad n\in Z\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, & (3)\end{array}\right.$$

На тригонометрической окружности эти серии будут расположены следующим образом:

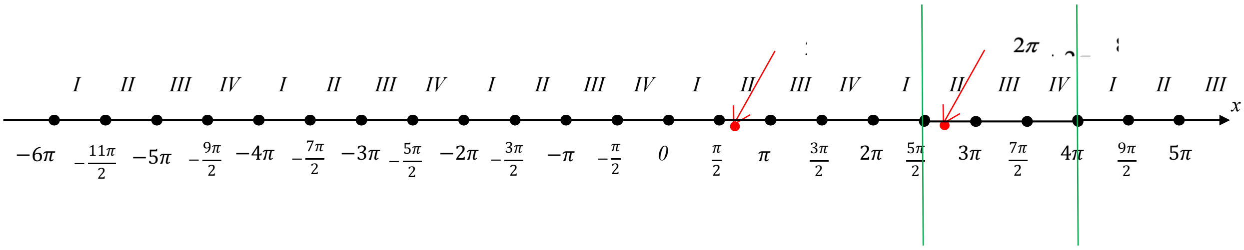



б) При помощи координатной прямой произведем отбор корней.
Серия решений (1)



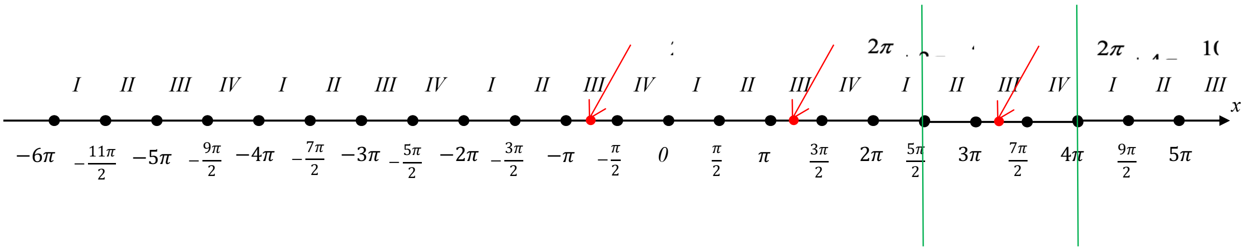

Вывод: $arctg5+3\pi \in \left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Серия решений (2)




Вывод: $\frac{8\pi}{3} \in \left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Серия решений (3)




Вывод: $\frac{10\pi}{3} \in \left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

В итоге получаем следующие корни: $arctg5+3\pi$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{arctg5+\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi n : n \in Z\right\}$; б) $arctg5+3\pi$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

## Заключение

В заключении хотим отметить, что у данного метода есть свои преимущества и недостатки. К преимуществам можно отнести: более наглядное восприятие числовых промежутков по сравнении с тригонометрическим кругом; по сравнению с методом отбора корней с помощью двойного неравенства, этот метод позволяет экономить время на вычислениях, а также отбирать корни, если они явно не выражаются в радианной мере. К недостаткам этого метода можно отнести те случаи, когда слагаемое, отвечающее в ответе за периодичность решений, имеет значение не кратное $\pi$. В этом случае придется более аккуратно следить за переходом корней серии из одной координатной четверти в другую.

Надеемся, что предложенный метод поможет учащимся при подготовке к решению задач профильного ЕГЭ по математике.

**Список литературы**

1. Павлова Т.А., Уварова М.Н. Предварительная подготовка к Единому государственному экзамену и результат // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2016. № 4(73). С. 316-321.
2. Уварова М.Н., Павлова Т.А. Интернет-экзамен: методическое пособие для подготовки к интернет-экзамену. Орел: Изд-во «Картуш», 2010. 163 с.
3. Петрушина Н.Н., Уварова М.Н. Использование интернет-тестирования как формы контроля качества подготовки студентов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2009. № 7-2. С. 153-155.
4. Павлова Т.А., Уварова М.Н. Модель как средство решения экономических задач // В сборнике: Актуальные проблемы естественнонаучного образования, защита окружающей среды и здоровья человека (Настоящее и будущее подготовки учащихся и студентов университетов в области естественных наук). Материалы IV Международной очной научно-практической конференции. 2016. С. 283-284
5. Уварова М.Н., Павлова Т.А. Интернет тестирование в образовании // Russian Agricultural ScienceR eview. 2015. Т. 6. № 6-3. С. 337-342.
6. Уварова М.Н., Павлова Т.А. Актуальные проблемы развития и качества образования на современном этапе // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2017. № 4(77) С. 341-344.
7. Драгныш Н.В. Использование инновационных технологий для преподавания курса «Теория вероятностей и математическая статистика» // Дискуссия. 2010. № 8. С. 80-83.
8. Снегурова В.И. Особенности проектирования методической системы дистанционного обучения математике // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2008. № 52. С. 124-136.
9. Ткаченко Н.Ю. Использование дистанционной технологии обучения при подготовке к ЕГЭ по математике (на примере темы: «Элементы комбинаторики») // Научный журнал «Наука и образование: открытия, перспективы, имена». 2018. № 2. С. 364-367.
10. Табачкова М.Ю., Борискина И.П. Интерактивные методы обучения в математике. Интеграция образования. 2014. Т. 18. № 3 (76). С. 65-70.
11. Захарова И.В., Кузенков О.А. Опыт реализаций требований образовательных и профессиональных стандартов в области ИКТ в российском образовании // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 31. С. 17-31.
12. Новикова С.В. Преимущества компьютерных тренажёров при изучении вычислительных методов // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (EducationalTechnology&Society). 2015. V.18. №2. С.478-488.
13. Савкина А.В., Нуштаева А.В., Борискина И.П. Информатизация курса "Алгебра и геометрия" с помощью интеллектуальной обучающей системы Math-Bridge // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society)». 2016. Т. 19. № 4. С. 479-487.
14. Rohimah S. M. 2017. Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika (JPPM) 10 132-141
15. Huljannah M, Sugita G. and Anggraini. 2015. Aksioma: Jurnal Pendidikan Matematika 4 164-176.

## One of the methods of root selection in solving trigonometric equations

**Zoya G. Goncharova**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
Russian State Agrarian University - Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazeva
Moscow, Russia
zgoncharova@mail.ru
0000-0003-1120-9195

**Tatyana Yu. Demina**
Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics
Russian State Agrarian University - Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazeva
Moscow, Russia
tatdemina@mail.ru
0000-0003-2079-5173

**Elena V. Neiskashova**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
Russian State Agrarian University - Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazeva
Moscow, Russia
neiskashova@rgau-msha.ru
0000-0001-8491-7649

**Viktor V. Demin**
Teacher of mathematics and computer science
Moscow State Educational Institution "School No. 218", Moscow, Russia
demin-viktor@mail.ru
0000-0002-5397-8016

Received 15.02.2021
Accepted 21.03.2021
Published 11.05.2021

10.25726/r7854-2774-0932-h

**Abstract**

When preparing students in grades 10-11 for the profile USE in mathematics, there are difficulties in selecting the roots of the trigonometric equation that belong to a given interval. There are several methods of root selection, but there is no perfect one – each of these methods has its own weaknesses. We want to propose a method that, in our opinion, allows students to more successfully select the roots in trigonometric equations. In a school mathematics course, the most common way to select roots is to use a trigonometric circle or to select roots using a double inequality that defines a given interval. The situation in real tasks is complicated by the fact that the specified range for the values of the roots goes beyond one circle. This fact complicates the selection of roots on the circle itself, since it requires students to have a more complex orientation on it. If the root value cannot be explicitly written in the radian measure, then selecting the roots using the double inequality becomes problematic. The basic level math exam paper consists of one part, including 20 tasks with a short answer. All tasks are aimed at testing the development of basic skills and practical skills of applying mathematical knowledge in everyday situations. The answer to each of the tasks 1-20 is an integer, a finite decimal, or a sequence of digits.

**Keywords**

Selection of roots, USE, mathematics, students, tasks.

**References**

1. Pavlova T.A., Uvarova M.N. Predvaritel'naja podgotovka k Edinomu gosudarstvennomu jekzamenu i rezul'tat // Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Gumanitarnye i social'nye nauki. 2016. № 4(73). S. 316-321.
2. Uvarova M.N., Pavlova T.A. Internet-jekzamen: metodicheskoe posobie dlja podgotovki k internet-jekzamenu. Orel: Izd-vo «Kartush», 2010. 163 s.

3. Petrushina N.N., Uvarova M.N. Ispol'zovanie internet-testirovanija kak formy kontrolja kachestva podgotovki studentov // Aktual'nye problemy gumanitarnyh i estestvennyh nauk. 2009. № 7-2. S. 153-155.

4. Pavlova T.A., Uvarova M.N. Model' kak sredstvo reshenija jekonomicheskih zadach // V sbornike: Aktual'nye problemy estestvennonauchnogo obrazovanija, zashhita okruzhajushhej sredy i zdorov'ja cheloveka (Nastojashhee i budushhee podgotovki uchashhihsja i studentov universitetov v oblasti estestvennyh nauk). Materialy IV Mezhdunarodnoj ochnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. 2016. S. 283-284

5. Uvarova M.N., Pavlova T.A. Internet testirovanie v obrazovanii // Russian Agricultural ScienceR eview. 2015. T. 6. № 6-3. S. 337-342.

6. Uvarova M.N., Pavlova T.A. Aktual'nye problemy razvitija i kachestva obrazovanija na sovremennom jetape // Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Gumanitarnye i social'nye nauki. 2017. № 4(77) S. 341-344.

7. Dragnysh N.V. Ispol'zovanie innovacionnyh tehnologij dlja prepodavanija kursa «Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika» // Diskussija. 2010. № 8. S. 80-83.

8. Snegurova V.I. Osobennosti proektirovanija metodicheskoj sistemy distancionnogo obuchenija matematike // Izvestija RGPU im. A.I. Gercena. 2008. № 52. S. 124-136.

9. Tkachenko N.Ju. Ispol'zovanie distancionnoj tehnologii obuchenija pri podgotovke k EGJe po matematike (na primere temy: «Jelementy kombinatoriki») // Nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie: otkrytija, perspektivy, imena». 2018. № 2. S. 364-367.

10. Tabachkova M.Ju., Boriskina I.P. Interaktivnye metody obuchenija v matematike. Integracija obrazovanija. 2014. T. 18. № 3 (76). S. 65-70.

11. Zaharova I.V., Kuzenkov O.A. Opyt realizacij trebovanij obrazovatel'nyh i professional'nyh standartov v oblasti IKT v rossijskom obrazovanii // Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie. 2016. T. 12. № 31. S. 17-31.

12. Novikova S.V. Preimushhestva komp'juternyh trenazhjorov pri izuchenii vychislitel'nyh metodov // Mezhdunarodnyj jelektronnyj zhurnal «Obrazovatel'nye tehnologii i obshhestvo (EducationalTechnology&Society). 2015. V.18. №2. C.478-488.

13. Savkina A.V., Nushtaeva A.V., Boriskina I.P. Informatizacija kursa "Algebra i geometrija" s pomoshh'ju intellektual'noj obuchajushhej sistemy Math-Bridge // Mezhdunarodnyj jelektronnyj zhurnal «Obrazovatel'nye tehnologii i obshhestvo (Educational Technology & Society)». 2016. T. 19. № 4. S. 479-487.

14. Rohimah S. M. 2017. Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika (JPPM) 10 132-141

15. Huljannah M, Sugita G. and Anggraini. 2015. Aksioma: Jurnal Pendidikan Matematika 4 164-176.