

Элементы дисперсионного анализа в физическом практикуме

Татьяна Борисовна Гольдварг

доцент кафедры экспериментальной и общей физики
Калмыцкий государственный университет имени Городовикова Б.Б.
Элиста, Россия
tgoldvarg@bk.ru
 0000-0002-4838-8783

Юлия Николаевна Радачинская

старший преподаватель кафедры алгебры, анализа и методики преподавания математики
Калмыцкий государственный университет имени Городовикова Б.Б.
Элиста, Россия
yulia.050570@mail.ru
 0000-0000-0000-0000

Поступила в редакцию 09.10.2022

Принята 18.11.2022

Опубликована 01.12.2022

 10.25726/c1624-5010-9548-c

Аннотация

Экспериментальная деятельность является ключевой при формировании компетенций студентов физических и химических направлений, что отражено в современных федеральных образовательных стандартах. Особую актуальность, при этом, приобретают навыки построения математических моделей изучаемых явлений. Традиционно при обработке данных физического эксперимента применяются статистические методы, которые позволяют определить ошибки измерений, выявить выбросы и оценить средние значения с учетом абсолютной и относительной погрешностей. В последнее время, во всех областях естественно-научного знания нашел свое применение дисперсионный анализ. Он является эффективным методом при изучении экспериментальных данных, так как позволяет пронаблюдать влияние различных факторов на исход опыта. В работе представлен пример расширения этих процедур и использование дисперсионного анализа на практикуме по физике для студентов физических направлений в Вузе. Целью данной статьи является изучение возможностей применения дисперсионного анализа при тестировании работы нескольких лабораторных приборов для определения удельного сопротивления металла. Постановка и решение такой задачи, при наличии ряда одинаковых установок, дает студентам возможность расширить свои представления о применении аппарата теории вероятностей и математической статистики.

Ключевые слова

дисперсионный анализ, физический эксперимент.

Введение

Физика, как эмпирическая наука, предполагает проведение обязательного эксперимента или наблюдения в зависимости от раздела, в котором ведётся исследование и технического оснащения. Безусловное преимущество эксперимента заключается в его планировании и повторении необходимое количество раз. Это дает возможность ставить вопросы, получать на них ответы и многократно их проверять. В настоящее время данные эксперимента не только позволяют определить искомую физическую величину с учетом погрешности, но и помогают понять – от чего зависит результат, какие факторы влияют на него и на исход эксперимента. Здесь многократно возрастает роль математической

статистики, так как именно аппарат этого раздела высшей математики, дает возможность более глубокого понимания данных.

Привычное использование математических подходов при изучении физики, как в школе, так и на следующих уровнях образования (в Сузе и Вузе) обеспечивает глубокое понимание природных процессов и дает возможность обучающимся увидеть четкую логику научного познания. Именно эта тесная связь между дисциплинами позволяет структурировать физические понятия, строить модели и выбирать методы исследования. Преподавание физики включает целую систему математических подходов, которые адаптированы к уровню обучения и помогают улучшить понимание физических явлений.

Так, студенты, изучающие физику, сталкиваются с применением высшей математики в курсах общей и теоретической физики, спецкурсах и на лабораторных работах (Гольдварг, Петрович, Сумьянова, 2020). Физический практикум является обязательной дисциплиной при подготовке бакалавров в области естественных наук. Именно здесь формируются компетенции обучающихся, связанные с навыками экспериментальной деятельности, в том числе навыками обработки, анализа и представления результатов эксперимента.

Материалы и методы исследования

Широкий спектр статистических методов, применяемых в физике, обусловлен как самой природой изучаемых процессов (Thoma, Sapos, Sullivan, Thompson, Tran, 2013), так и ограниченной точностью проводимых измерений. Последний вопрос в различных его аспектах рассматривается в большом количестве учебных пособий (Маркин, 1991) и научных статей (Корнев, Корнева, 2015). Отдельно надо сказать об интерпретации результатов эксперимента – статистические методы позволяют построить адекватную физическую модель и извлечь максимум информации из полученных результатов. Таким образом, можно говорить о математической статистике, как о части инструментария физического эксперимента. За исследователем остается лишь выбор подходящего метода. Так, при анализе влияния различных факторов на исход события часто используют дисперсионный анализ (Подживотов, 2022). Этот метод позволяет сравнивать изменения в результатах при варьировании различных параметров, влияющих на систему. Поэтому его применение при анализе результатов эксперимента является естественным и рассматривается в данной статье.

Результаты и обсуждение

Применение дисперсионного анализа при оценке приборной погрешности. При проведении физического эксперимента необходимо учитывать воздействие случайных и систематических факторов, каждый из которых оказывает влияние на результаты измерений. С помощью дисперсионного анализа можно отделить случайные эффекты от систематических. Это можно сделать путем сравнения общей, факторной и остаточной дисперсии. Особенность этого статистического метода – анализ нескольких наборов измерений, а не просто сравнение средних значений физических параметров, то есть можно проверить несколько нулевых гипотез одновременно. В основе процедуры ставится вопрос о величине дисперсии в рассматриваемой выборке наблюдений. Наряду с однофакторным анализом часто используют двух факторных и даже многофакторный анализ, когда одновременно проверяются влияния двух факторов или более причин, их взаимодействие и влияние на исход эксперимента. На основе результатов исследования выбираются значимые факторы и взаимодействия, которые входят в качестве переменных в математическую модель процесса (Budde, 2009).

Поставим статистическую задачу: выяснить вопрос о качественной работе приборов методом дисперсионного анализа. Будем считать количественный признак измерений нормальной величиной X (или близкой к нормальной).

Оценка качества измерения удельного сопротивления проволоки проводится с помощью $r=4$ приборов. Необходимо исследовать, влияет ли фактор «прибор» на результат измерений. Под влиянием мы будем подразумевать качественную работу приборов на одном уровне. Если факторы «приборы»

будут оказывать существенное влияние на измерение, то это означает, что требуется профилактическая проверка и юстировка данных приборов.

На всех четырех приборах были установлены одинаковые образцы проволоки радиусом $r=0.3$ мм, длина которой изменялась через 5 см., начиная от 5 и до 45, сила тока – постоянная 160 мА и фиксировалась напряжение на концах. Сопротивление вычисляем по известной формуле: $R = \rho \frac{L}{S}$. С

другой стороны, по закону Ома $R = \frac{U}{I}$, подставляя, имеем: $\frac{U}{I} = \rho \frac{L}{S}$. Окончательно:

$\rho = \frac{U}{I} * \frac{S}{L}$, где $S = \pi r^2$ – площадь поперечного сечения проволоки, (m^2)

$S = \pi r^2 = 3,14 * 9 * 10^{-8} = 2,826 * 10^{-7} m^2$, подставляя получим рабочую формулу для вычисления удельного сопротивления $\rho = 1,76625 * 10^{-6} * \frac{U}{I}$.

Данные и результаты оформим в таблицы:

Таблица № 1

Прибор № 1				Прибор № 2			
I, (A)	l, (м)	U, (В)	$\rho, (OM м), *10^{-6}$	I, (A)	l, (м)	U, (В)	$\rho, (OM м), *10^{-6}$
0,16	0,05	0,1	3,5325	0,16	0,05	0,125	4,4156
0,16	0,1	0,2	3,5325	0,16	0,1	0,225	3,9741
0,16	0,15	0,3	3,5325	0,16	0,15	0,3	3,5325
0,16	0,25	0,45	3,1169	0,16	0,25	0,475	3,3559
0,16	0,35	0,65	3,2801	0,16	0,35	0,665	3,3559
0,16	0,45	0,85	3,3363	0,16	0,45	0,825	3,2381

Таблица № 2

Прибор № 3				Прибор № 4			
I, (A)	l, (м)	U, (В)	$\rho, (OM м), *10^{-6}$	I, (A)	l, (м)	U, (В)	$\rho, (OM м), *10^{-6}$
0,16	0,05	0,175	6,1819	0,16	0,05	0,17	6,0053
0,16	0,1	0,25	4,4156	0,16	0,1	0,3	5,2988
0,16	0,15	0,35	4,1213	0,16	0,15	0,35	4,1212
0,16	0,25	0,425	3,0026	0,16	0,25	0,45	3,1793
0,16	0,35	0,7	3,5325	0,16	0,35	0,6	3,0279
0,16	0,45	0,85	3,3363	0,16	0,45	0,65	3,2802

На количественный нормально распределенный признак X воздействует фактор F, который имеет p постоянных уровней. Пусть число наблюдений на каждом уровне одинаково и равно q.

Пусть наблюдалось pq значений x_{ij} признака X (i – номер испытания, j – номер уровня фактора).

Формулы общей, факторной и остаточных сумм соответственно (Шеффе, 1980):

$$(1) \quad S_{общ} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (x_{ij} - \bar{x})^2; S_{факт} = q \sum_{j=1}^p (\bar{x}_{zp j} - \bar{x})^2$$

$$S_{ост} = \sum_{i=1}^q (x_{i1} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^q (x_{i2} - \bar{x})^2 + \dots + \sum_{i=1}^q (x_{ip} - \bar{x})^2$$

Упрощенные формулы:

$$(2) \quad S_{общ} = \sum_{j=1}^p P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^p R_j \right]^2}{pq}; S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^p R_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^p R_j \right]^2}{pq}, \quad где \quad P_j = \sum_{i=1}^q x_{ij}^2; R_j = \sum_{i=1}^q x_{ij}$$

$$(3) S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}$$

Составим таблицу наблюдений по опытным данным $p=4$ и $q=6$ с вычисленными групповыми средними, а также вспомогательными величинами P и R для упрощенных формул:

Таблица № 3

№	Уровни фактора F_j , * 10^{-6}			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	3,5325	4,4156	6,1819	6,0053
2	3,5325	3,9741	4,4156	5,2988
3	3,5325	3,5325	4,1213	4,1212
4	3,1169	3,3559	3,0026	3,1793
5	3,2801	3,3559	3,5325	3,0279
6	3,3363	3,2381	3,3363	3,2802
Гр. ср.	$\bar{x}_{гр1} = 3,3885$	$\bar{x}_{гр2} = 3,6454$	$\bar{x}_{гр3} = 4,0984$	$\bar{x}_{гр4} = 4,1521$
P	69,0407	80,779	107,3236	111,161
R	20,3308	21,8721	24,5902	24,9127

Общая средняя

$$\bar{x} = \frac{1}{24} \sum_{j=1}^4 P_j = \frac{1}{24} (20,3308 + 21,8721 + 24,5902 + 24,9127) = 3,8211$$

Определяем общую, факторную и остаточную суммы по формулам (2) и (3):

$$S_{общ} = 69,0407 + 80,779 + 107,3236 + 111,161 - (20,3308 + 21,8721 + 24,5902 + 24,9127)^2 / 24 = 17,8896$$

$$S_{факт} = (20,3308^2 + 21,8721^2 + 24,5902^2 + 24,9127^2) / 6 - (20,3308 + 21,8721 + 24,5902 + 24,9127)^2 / 24 = 352,8418 - 350,4147 = 2,4271$$

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} = 17,8896 - 2,4271 = 15,4625$$

Общая, факторная и остаточная дисперсии определяем по формулам:

$$s_{общ}^2 = \frac{S_{общ}}{pq - 1}; s_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{p - 1}; s_{ост}^2 = \frac{S_{ост}}{p(q - 1)}$$

$$s_{общ}^2 = \frac{17,8896}{24 - 1} = 0,7778 \quad s_{факт}^2 = \frac{2,4271}{4 - 1} = 0,809$$

$$s_{ост}^2 = \frac{15,4625}{4(6 - 1)} = 0,7731$$

Рассматриваем задачу о равенстве нескольких средних нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями $H_0: M(X_1) = M(X_2) = M(X_3) = M(X_4)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Пусть H_0 справедлива. Тогда факторная и остаточная дисперсии являются несмещенными оценками неизвестной дисперсии и, следовательно, различаются незначимо. Если сравнить эти оценки по критерию F Фишера -Снедекора, то гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий принимаем. Обратное также верно. Таким образом, из верности (ложности) гипотезы о дисперсиях следует правильность (ложность) гипотезы о средних.

Критерий:

$$F = \frac{S_{факт}^2}{S_{ост}^2}; F_{кр} = F(\alpha, k_1, k_2), k_1 = p - 1,$$

$k_2 = q - 1$ – степени свободы.

Определяем наблюдаемое значение критерия:

$$F_{набл} = \frac{S_{факт}^2}{S_{ост}^2} = \frac{0,809}{0,7731} = 1,05$$

$$F_{\text{крит}} = F(=0,05 \alpha, k_1=p-1=4-1=3, k_2=q-1=6-1=5)=5,41$$

Если $F_{\text{набл}} \geq F_{\text{кр}}$, то гипотезу H_0 отвергаем. Групповые средние, в целом, различаются значимо. Так как $F_{\text{набл}} 1,05 < F_{\text{крит}} = 5,41$, то гипотезу о равенстве средних принимаем.

Вывод: все приборы обеспечивают достаточную точность измерений и в наладке или ремонте не нуждаются.

Заключение

Любые измерения физических величин имеют некоторую неопределённость. Поэтому студенты естественно-научных направлений сталкиваются с основами теории ошибок уже в начале своего обучения в Вузе. Ошибки имеют различную природу, поэтому анализ причин, по которым они возникают, является важной задачей, решение которой позволяет сделать обоснованные выводы по результатам эксперимента. Ограничения измерения, в том числе, могут быть связаны с точностью измерительного прибора, в данной работе приводятся результаты проведенного дисперсионного анализа по выявлению неточности в работе ряда лабораторных установок для определения одного и того же показателя физической величины. Такой подход позволяет обучающимся глубже понять природу систематических ошибок, оценить роль высшей математики в физическом эксперименте и построить адекватную модель изучаемого явления.

Список литературы

1. Гольдварг Т.Б., Петрович Э.В., Сумьянова Е.В. Методика преподавания лабораторного практикума общей физики в высшей школе Современное педагогическое образование. 2020. № 10. С. 41-46.
2. Корнев К.П., Корнева И.П. Математическая обработка результатов измерений в физическом практикуме // Вестник Балтийского федерального университета им. Канта И. Серия: Физико-математические и технические науки. 2015. №10.
3. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений. М.: Изд. стандартов, 1991.
4. Подживотов Н.Ю. Оценка результатов испытаний с помощью однофакторного дисперсионного анализа // Труды ВИАМ. 2022. № 8 (114). С. 12.
5. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. Budde J., Variance analysis and linear contracts in agencies with distorted performance measures. Management Accounting Research, vol. 20, no. 3, pp. 166-176, 2009.
7. Thoma S.J. Pfaff, Sipos Maksim, Sullivan M.C., Thompson B.G., Tran Max M. The Use of Statistics in Experimental Physics Mathematics Magazine 2013 86(2): 120-131.

Elements of ANOVA in Physics Practice

Tatyana B. Goldvarg

associate Professor of the Department of Experimental and General Physics
Kalmyk State University named after Gorodovikov B.B.

Elista, Russia

tgoldvarg@bk.ru

 0000-0002-4838-8783

Yulia N. Radachinskaya

senior Lecturer, Department of Algebra, Analysis and Methods of Teaching Mathematics
Kalmyk State University named after Gorodovikov B.B.

Elista, Russia

yulia.050570@mail.ru

 0000-0000-0000-0000

Received 09.10.2022

Accepted 18.11.2022

Published 01.12.2022

 10.25726/c1624-5010-9548-c

Abstract

Experimental activities are key in the formation of the competencies of students in physical and chemical fields, which is reflected in modern federal educational standards. At the same time, the skills of constructing mathematical models of the studied phenomena acquire particular relevance. Traditionally, when processing the data of a physical experiment, statistical methods are used that make it possible to determine measurement errors, identify outliers, and estimate average values, taking into account absolute and relative errors. Recently, in all areas of natural science knowledge, dispersion analysis has found its application. It is an effective method in the study of experimental data, as it allows you to observe the influence of various factors on the outcome of the experiment. The paper presents an example of expanding these procedures and using analysis of variance in a physics workshop for students of physics at the university. The purpose of this article is to study the possibilities of using analysis of variance when testing the operation of several laboratory instruments for determining the resistivity of a metal. The formulation and solution of such a problem, in the presence of a number of identical settings, gives students the opportunity to expand their understanding of the application of the apparatus of probability theory and mathematical statistics.

Keywords

dispersion analysis, physical experiment.

References

1. Gol'dvarg T.B., Petrovich E.V., Sum'yanova E.V. Metodika prepodavaniya laboratornogo praktikuma obshchej fiziki v vysshej shkole Sovremennoe pedagogicheskoe obrazovanie. 2020. № 10. S. 41-46.
2. Kornev K.P., Korneva I.P. Matematicheskaya obrabotka rezul'tatov izmerenij v fizicheskom praktikume // Vestnik Baltijskogo federal'nogo universiteta im. Kanta I. Seriya: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki. 2015. №10.
3. Markin N.S. Osnovy teorii obrabotki rezul'tatov izmerenij. M.: Izd. standartov, 1991.
4. Podzhivotov N.YU. Ocenka rezul'tatov ispytanij s pomoshch'yu odnofaktornogo dispersionnogo analiza // Trudy VIAM. 2022. № 8 (114). S. 12.
5. SHeffe G. Dispepsionnyj analiz. M.: Nauka, 1980. 512 s.
6. Budde J., Variance analysis and linear contracts in agencies with distorted performance measures. Management Accounting Research, vol. 20, no. 3, pp. 166-176, 2009.
7. Thoma S.J. Pfaff, Sipos Maksim, Sullivan M.C., Thompson B.G., Tran Max M. The Use of Statistics in Experimental Physics Mathematics Magazine 2013 86(2): 120-131.