Метод опорной задачи при подготовке студентов к олимпиадам по аналитической геометрии

Светлана Сангаджиевна Мучкаева
кандидат педагогических наук, доцент кафедры Алгебры, анализа и методики преподавания математики
Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова
Элиста, Россия
muchkayeva2022@bk.ru
0000-0000-0000-0000

Поступила в редакцию 24.07.2022
Принята 16.08.2022
Опубликована 15.09.2022

10.25726/a3421-2264-1882-w

Аннотация

В статье рассматривается один из методов подготовки студентов к участию в математических олимпиадах различного уровня. Предлагается выделить в каждом разделе типичную задачу высокого уровня сложности, решая которую выделяются основные структурные элементы. Затем на основе этого опорного задания, формулируются условия еще нескольких схожих по тематике, что позволяет сформировать у обучающихся необходимые навыки. Для иллюстрации изложенного метода, приводятся несколько таких блоков задач.

Ключевые слова

необходимые навыки, метод, студенты, уровень, условия.

Введение

Одной из главных задач вуза является развитие у студентов познавательных интересов, творческого отношения к делу, стремления к самостоятельному "добыванию" и обогащению знаний и умений, применяя их в дальнейшей своей практической деятельности. Всероссийские студенческие предметные олимпиады (ВСО) полностью отвечают этим задачам. Они охватывают большое число дисциплин и способствуют формированию различных компетенций студентов высшей школы. Поэтому вопрос подготовки к таким соревнованиям является очень актуальным в современном образовании. В настоящее время публикуются работы, посвященные разбору заданий, различным способам их решения, методике подготовки к олимпиадам, анализу результатов и так далее. Например, в статье (Стародубец, 2014) изложены некоторые аспекты из опыта проведения ВСО по химии в Казанском государственном университете.

Особую роль в развитии общепрофессиональных навыков играют студенческие математические олимпиады, в которых в силу междисциплинарного характера математики, могут принимать участие студенты различных направлений и специальностей. Ежегодно практически во всех вузах России проводятся такие состязания, которые имеют целью выявление наиболее талантливых, имеющих математические способности студентов, активизацию научного творчества студентов, развитие математического мышления. Как указано в исследовании (Шамайло, 2008), широкое вовлечение студентов младших курсов в олимпиадное математическое движение, способствует раскрытию их потенциала.

Материалы и методы исследования

Поддержка олимпиадного студенческого движения происходит на государственном уровне, принимается ряд программ для талантливой молодежи, которые включают мероприятия, направленные на повышение интереса к науке, выявление и развитие способностей к отдельным дисциплинам, а также позволяет подготовиться к различным соревнованиям (Кошкин, 2014).

Вопросам планомерной подготовки студентов к математическим олимпиадам различного уровня посвящено большое число научных статей. Так в работе (Землякова, 2020) описан эксперимент по введению задач олимпиадного уровня в программу курса по высшей математике для студентов технических и экономических специальностей. Эти задачи не являлись обязательными для всех и предлагались для самостоятельного решения как в аудитории, так и дома. Как показал последующий мониторинг учебной и научной деятельности вовлеченных студентов, решение творческих задач способствует достижению более высоких результатов.

Результаты и обсуждение

Предлагаемые на математических олимпиадах задачи, например (Амбарцумян, 2014; Янович, 2009], обычно, имеют нестандартный характер и иллюстрируют ту или иную математическую идею. При подготовке к соревнованиям важна не только тематическая классификация, но и уровень сложности задач. Авторы статьи (Власова, 2017) рассмотрели различные системы оценки уровня олимпиадных задач, которые помогают при ранжировании заданий. В этой же статье приводятся авторские решения задач студенческих олимпиад различного уровня сложности и подчеркивается роль прикладных задач в формировании профессиональных навыков бакалавров.

Особенности подготовки студентов к математическим олимпиадам. Главным условием формирования познавательного интереса к олимпиадному движению является правильный отбор содержания и организация подготовки к олимпиадам. Отбирая материал и продумывая приемы, которые будут использованы при подготовке, надо оценивать их с точки зрения возможности возбудить, а затем поддерживать интерес к решению. А один из критериев успеха системы упражнений – ее привлекательность (Мучкаева, 2007).

Раздел аналитической геометрии богат на задачи высокого уровня сложности, которые благодаря визуализации и графическому представлению имеют большей интерес как для студентов, так и для методистов, работающих над структурой задач, основными приемами решений и приложениями. По-видимому, вообще красота геометрии есть своеобразный симбиоз красоты геометрических форм и красоты логических конструкций, встречающихся в геометрии. Кроме этого некоторые авторы (Mujiasih, 2017) предполагают, что при решении задач аналитической геометрии возникает рост математических коммуникативных способностей.

Многие студенты считают, что они знают математику, если владеют основными математическими операциями и знают алгоритмы исчисления, когда на самом деле важно применение математических идей. Проведение олимпиад является одним из факторов, позволяющих обучающимся понять ограниченность такого восприятия и создать мотивационные предпосылки для развития творческих способностей и широты математического мышления. Здесь важным фактором является подготовка к соревнованиям, которая не только стимулирует изучение науки, но и способствует сотрудничеству, способствует образовательным процессам и способствует творчеству и способности принимать решения.

Каждый раздел высшей математики имеет свои особенности, что накалывает определённые условия на наставников, которые занимаются подготовкой студентов к олимпиадам. Поэтому обычно с командой работает не один, а несколько преподавателей, каждый из которых разрабатывает свои специализированные дидактические методы, позволяющих развить конкретные компетенции с точки зрения продуктивно-творческого подхода.

Большинство задач по аналитической геометрии относятся к задачам, в которых содержание составляет овладение более сложным действием, составленным из нескольких действий, и способность применения сложного действия в алгоритмической ситуации (Новичкова, 2014), поэтому организация занятий по этой теме является одной из самых сложных.

Одним из эффективных методов тренировки математических навыков по аналитической геометрии является, так называемый метод опорной задачи, когда на основе «ключевой задачи» формулируется ряд схожих по форме задач, которые имеют те или иные особенности. Это с одной стороны благоприятный фон для поиска решений, так как формируется структурность мышления на основе «известной проблемы», а с другой стороны, расширяется круг математических компетенций студентов.

При подготовке к олимпиадам мы разработали серии задач и методы их решения. Каждое занятие начиналось с теоретической части, описывающей набор связанных теорем и инструментов, затем приводим один или несколько примеров, демонстрирующих применение этих основ и уже потом, даем набор из нескольких практических задач. Геометрическая конфигурация, рассматриваемая в теории, появляется либо в доказательстве другого утверждения, либо в решениях упражнений. То есть является ключом к решению конкретной проблемы. Примеры задач демонстрируют, как описанные методы, могут быть использованы для решения конкретных задач.

В аудитории мы старались не просто предложить решение, но и объяснить, откуда оно взялось, что может способствовать развитию интуиции, которая необходима для успешной подготовки к олимпиадам.

Примеры применения метода. Для иллюстрации рассмотрим несколько опорных и задач из (Григорьева, 2011) и расширим их условия.

Задача 1а: Сфера $x^2+y^2+z^2=4z$ освещена пучком лучей, параллельных прямой x = 0, y = z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Решение: Пусть $M_0(x_0;y_0;0)$ – произвольная точка границы тени на плоскости xOy. Проведем через M0 прямую, параллельную прямой

$\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$ или в каноническом виде $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Имеем $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z}{1}$.

С учетом того, что данная прямая касается сферы, то для нахождения координат точки касания M (x;y;z) решим систему уравнений: $\begin{cases} x=x_0 \\ z=y-y_0 \\ x^2+y^2+z^2=4z \end{cases}$

После некоторых преобразований имеем:

$$2y^2-2y(y_0+2)+{x_0}^2+{y_0}^2+4y_0=0.$$

Это уравнение должно иметь равные корни, т.е. дискриминант его равен нулю. $D=4(y_0+2)^2-4\cdot 2({x_0}^2+{y_0}^2+4y_0)=0$

Отсюда находим зависимость между координатами любой точки M_0 $(x_0;y_0)$ границы тени на плоскости xOy.

Получаем после преобразований: $\frac{x^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{8}=1.$

Это эллипс с центром в точке C(0;–2) и полуосями a = 2, $b=2\sqrt{2}$.

Если рассмотреть серии задач, изменяя несколько условие, получим:

Задача 1б: Сфера x2 + y2 + z2 = 4z освещена пучком лучей, параллельных прямой x = 0, y =- z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Ответ: $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{8}=1.$

Задача1в: Сфера x2 + y2 + z2 = 4z освещена пучком лучей, параллельных прямой y = 0, x =z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Ответ: $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$

Задача1г: Сфера x2 + y2 + z2 = 4z освещена пучком лучей, параллельных прямой y = 0, x =- z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Ответ: $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$

Или изменить уравнение сферы.

Задача 2: Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 4x$ освещена пучком лучей, параллельных прямой y = 0, x = z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Ответ: $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$

Задача 3: Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 4y$ освещена пучком лучей, параллельных прямой x= 0, y = z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Ответ: : $\frac{x^2}{8} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1.$

Ну, а теперь рассмотрим шар и изменим уравнение прямой.

Задача 4: Шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ освещен пучком лучей, параллельных прямой x = y = z . Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Решение: Пусть $M_0(x_0;y_0;0)$ – произвольная точка границы тени на плоскости xOy. Проведем через M_0 прямую, параллельную прямой в каноническом виде $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Имеем $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z}{1}$.

С учетом того, что данная прямая касается шара, то для нахождения координат точки касания M (x;y;z) решим систему уравнений: $\begin{cases} x = x_0 + y - y_0 \\ z = y - y_0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

После нескольких преобразований имеем:

$$3y^2 + 2y(x_0 - 2y_0) + {x_0}^2 + 2{y_0}^2 - 2x_0y_0 - 4 = 0.$$

Это уравнение должно иметь равные корни, т.е. дискриминант его равен нулю. $D = 4(x_0 - 2y_0)^2 - 4 \cdot 3({x_0}^2 + 2{y_0}^2 - 2x_0y_0 - 4) = 0$/

Отсюда находим зависимость между координатами любой точки

M_0 $(x_0;y_0)$ границы тени на плоскости xOy.

Получаем после преобразований: $\cdot\ {x_0}^2 + {y_0}^2 - x_0y_0 - 6 = 0$или

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Это эллипс с центром в точке O(0;0) и полуосями a = $2\sqrt{3}$, b = 2.

Задача 5а. Докажите, что площадь треугольника, заключенного между осями координат и касательной к линии xy=1, где x,y ≥ 0 не зависит от выбора точки касания.

Решение: 1. Пусть x0 – точка касания к x•y=1.

2. Напишем уравнение касательной в этой точке к данной линии

У = $-\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}$

3. Найдем точки пересечения касательной с осями координат.

Если x=0, то y= $\frac{2}{x_0}$, а если y=0, то x= 2x0.

4. Теперь находим площадь S = $\frac{1}{2}2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$

Задача 5б. Докажите, что площадь треугольника, заключенного между осями координат и касательной к линии xy=a, где x,y ≥ 0 не зависит от выбора точки касания.

Ответ: S = $\frac{1}{2}2x_0 \cdot \frac{2a}{x_0} = 2|a|$

Задача 6. Докажите, что объем тетраэдра, заключенного между координатными плоскостями и касательными плоскостями к поверхности xyz = 1, где x, y, z ≥0, не зависит от точки касания.

Решение:

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$F'_x(x_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(y_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

$F'_x = yz$ $F'_y = xz$ $F'_z = xy$, тогда $F'_x(x_0) = y_0z_0$; $F'_y(y_0) = x_0z_0$; $F'_z(z_0) = x_0y_0$

$$y_0z_0 \cdot (x - x_0) + x_0z_0 \cdot (y - y_0) + x_0y_0 \cdot (z - z_0) = 0$$

$$y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0 \qquad : 3x_0y_0z_0$$

Преобразуем уравнение плоскости к уравнению в отрезках:

$$\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$$

V = 1/3*1/2*3X0*3Y0*3Z0 = 9/2 =4,5

Задача 7: Докажите, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ в любой ее точке образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найти этот объем.

Заключение

Очень часто непривычная формулировка задачи лишь маскирует вполне доступное математическое содержание. По сути, эта задача 1, но общего случая. Решение задачи аналогичное и ответ $4{,}5|a^3|$.

Список литературы

1. Амбарцумян В.А., Андрющенко Е.А., Бухенский К.В., Дворецкова Е.А., Дюбуа А.Б., Зилотова М.А., Машнина С.Н., Сафошкин А.С. Студенческие математические олимпиады. Часть 1: учеб. пособие Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2014. 128 с.
2. Власова Е.А., Попов В.С., Пугачёв О.В. О математических олимпиадах для студентов технических вузов // Вестник МГОУ. Серия: Физика-математика. 2017. №3. С.108-119
3. Григорьева И.С. Казанские студенческие олимпиады по математике. Сборник задач: учеб.-метод. пособие. Казань: Казанский университет, 2011. 48 с.
4. Землякова И.В., Чебунькина Т.А. Роль и место математических олимпиад в системе подготовки студентов высших учебных заведений // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2020. №2. С. 206-209
5. Кошкин В.И., Гордеев А.И., Белоцерковский А.Е., Каплунов И.А., Мальцева А.А., Пустовалова Е.Л. О повышении эффективности всероссийских студенческих олимпиад // Высшее образование в России. 2014. № 11. С. 25-30.
6. Мучкаева С.С. Дидактические возможности чертежа / Сб. статей научно-практической конференции «Метаметодика как перспективное направление развития предметных методик». СПб. 2007.
7. Новичкова Т.Ю., Соколова З.П., Бочкарева О.В., Снежкина О.В. Решение задач повышенной сложности при подготовке к олимпиаде по математике // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 3.
8. Стародубец Е.Е., Петрова Т.П., Борисевич С.В. Роль студенческих олимпиад в развитии высшего профессионального образования // Вестник Казанского технологического университета. 2014. №16. С.342-346.
9. Шамайло О.Н. Математическая олимпиада как способ развития инновационного потенциала студентов технического университета // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. 2008. № 9. С. 124-130.
10. Янович Э.А. Задачи студенческих математических олимпиад, учебно-методическое пособие, 2009. 96 с
11. Mujiasih S B Waluya,Kartono and Mariani Growing geometric reasoning in solving problems of analytical geometry through the mathematical communication problems to state Islamic university students Journal of Physics: Conference Series, Volume 983,International Conference on Mathematics, Science and Education 2017 (ICMSE2017) 18–19 September 2017.

The method of the reference problem in preparing students for Olympiads in analytical geometry

Svetlana S. Muchkaeva
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Algebra, Analysis and Methods of Teaching Mathematics
Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov
Elista, Russia
muchkayeva2022@bk.ru
0000-0000-0000-0000

Received 24.07.2022
Accepted 16.08.2022
Published 15.09.2022

10.25726/a3421-2264-1882-w

Abstract

The article discusses one of the methods of preparing students to participate in mathematical Olympiads of various levels. It is proposed to highlight in each section a typical task of a high level of complexity, solving which the main structural elements are highlighted. Then, on the basis of this reference task, the conditions of several more similar topics are formulated, which allows students to form the necessary skills. To illustrate the described method, several such task blocks are given.

Keywords

required skills, method, students, level, conditions.

References

1. Ambarcumjan V.A., Andrjushhenko E.A., Buhenskij K.V., Dvoreckova E.A., Djubua A.B., Zilotova M.A., Mashnina S.N., Safoshkin A.S. Studencheskie matematicheskie olimpiady. Chast' 1: ucheb. posobie Rjazan. gos. radiotehn. un-t. Rjazan', 2014. 128 s.
2. Vlasova E.A., Popov V.S., Pugachjov O.V. O matematicheskih olimpiadah dlja studentov tehnicheskih vuzov // Vestnik MGOU. Serija: Fizika-matematika. 2017. №3. S.108-119
3. Grigor'eva I.S. Kazanskie studencheskie olimpiady po matematike. Sbornik zadach: ucheb.-metod. posobie. Kazan': Kazanskij universitet, 2011. 48 s.
4. Zemljakova I.V., Chebun'kina T.A. Rol' i mesto matematicheskih olimpiad v sisteme podgotovki studentov vysshih uchebnyh zavedenij // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Pedagogika. Psihologija. Sociokinetika. 2020. №2. S. 206-209
5. Koshkin V.I., Gordeev A.I., Belocerkovskij A.E., Kaplunov I.A., Mal'ceva A.A., Pustovalova E.L. O povyshenii jeffektivnosti vserossijskih studencheskih olimpiad // Vysshee obrazovanie v Rossii. 2014. № 11. S. 25-30.
6. Muchkaeva S.S. Didakticheskie vozmozhnosti chertezha / Sb. statej nauchno-prakticheskoj konferencii «Metametodika kak perspektivnoe napravlenie razvitija predmetnyh metodik». SPb. 2007.
7. Novichkova T.Ju., Sokolova Z.P., Bochkareva O.V., Snezhkina O.V. Reshenie zadach povyshennoj slozhnosti pri podgotovke k olimpiade po matematike // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2014. № 3.
8. Starodubec E.E., Petrova T.P., Borisevich S.V. Rol' studencheskih olimpiad v razvitii vysshego professional'nogo obrazovanija // Vestnik Kazanskogo tehnologicheskogo universiteta. 2014. №16. S.342-346.
9. Shamajlo O.N. Matematicheskaja olimpiada kak sposob razvitija innovacionnogo potenciala studentov tehnicheskogo universiteta // Izvestija Juzhnogo federal'nogo universiteta. Pedagogicheskie nauki. 2008. № 9. S. 124-130.

10. Janovich Je.A. Zadachi studencheskih matematicheskih olimpiad, uchebno-metodicheskoe posobie, 2009. 96 c

11. Mujiasih S B Waluya,Kartono and Mariani Growing geometric reasoning in solving problems of analytical geometry through the mathematical communication problems to state Islamic university students Journal of Physics: Conference Series, Volume 983,International Conference on Mathematics, Science and Education 2017 (ICMSE2017) 18–19 September 2017.