Обзор математических задач, удивляющих своими ответами

Александр Павлович Тонких
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры методики начального образования и педагогического менеджмента
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
Брянск, Россия
a_tonkih@mail.ru
ORCID 0000-0002-2140-8334

Поступила в редакцию 04.11.2023
Принята 17.12.2023
Опубликована 15.01.2024

УДК 51:165.2
DOI 10.25726/u1959-5258-6444-u
EDN DGZUKA
ВАК 5.8.7. Методология и технология профессионального образования (педагогические науки)
OECD 05.03.HE EDUCATION, SPECIAL

Аннотация

Обучение математике – это процесс, в котором учащиеся (школьники или студенты) учатся абстрактным и логическим законам математики, а также применению их при решении задач. Пополняя свои знания новыми математическими фактами, они становятся более уверенными в своих силах, развивают логическое и критическое мышление, необходимые не только при изучении многих других дисциплин, но и для познания окружающего мира. В статье рассмотрены примеры задач из различных разделов математики (арифметики, алгебры, геометрии, комбинаторики, теории вероятностей, математической статистики, математической логики и др.), которые на первый взгляд имеют очевидные ответы. Однако эти ответы неверные и лишь строгие математические рассуждения (или вычисления) позволяют получить верный ответ на поставленный в задаче вопрос. Более того, задачи подобраны так, что они удивляют своими верными ответами, которые кажутся невероятными, сомнительными и даже противоречащими здравому смыслу. Лишь строгие математические рассуждения позволяют развеять эти сомнения. Анализ допущенных ошибок в ходе решения математической задачи помогает учащимся лучше понимать, в каком месте они рассуждали неправильно, как исправить неверные выводы, что нужно сделать, чтобы избежать подобной ошибки в будущем. Исправление ошибок поможет им лучше понимать математический материал и окружающую действительность.

Ключевые слова

математика, универсальность математики, математическая точность, строгость математики, необычные математические задачи, очевидные ответы, окружающий мир.

Введение

Математика – наука, исторически основанная на решении задач о количественных и пространственных соотношениях реального мира путём идеализации необходимых для этого свойств объектов и формализации этих задач. Она играет важную роль в различных областях человеческой деятельности, позволяет нам решать разнообразные проблемы.

Одним из главных свойств математики является ее точность. Эта наука основана на строгих математических доказательствах и логических выводах, которые обеспечивают высокую степень точности получаемых результатов. Другим важным свойством математики является ее универсальность.

Она используется в различных областях науки и техники, а также в повседневной жизни. Она помогает исследовать физические законы, решать проблемы в гуманитарных и естественных науках.

Еще одним важным свойством математики является ее красота. Сама по себе её цель не состоит в создании красивых формул и доказательств, но на практике она обладает своей эстетикой и гармонией. Когда мы решаем математические задачи, мы можем ощущать удовлетворение и наслаждение от красоты и простоты решения.

Также математика может создавать новые возможности развития фундаментальных и практических исследований в различных областях науки и техники. Благодаря своей универсальности и точности она позволяет решать различные проблемы не только естественнонаучной, но и гуманитарной сферы, находя при этом необычные решения. Например, использование математики позволило создать новые системы некоторых устройств и технологий, которые ранее казались невозможными. Наконец, математика – это наука, которая помогает нам развивать критическое мышление и логическое мышление. Решение математических задач требует тщательного анализа и логических выводов, а также дисциплинированного и упорного подхода. Эти навыки могут быть полезны во многих аспектах жизни и могут помочь нам достигать успеха в самых разных областях.

Таким образом, математика – это наука с множеством свойств, которые делают ее не только важной, но и красивой, и увлекательной. Она помогает нам понимать мир, в котором мы живем, и решать сложные проблемы, возникающие на нашем пути.

При решении математических задач очень важно иметь правильный подход к решению. Иногда некоторые ответы, которые кажутся очевидными, на самом деле являются неверными, а верный ответ, наоборот, кажется неправдоподобным и сомнительным. В данной статье проведем обзор подобных задач (назовем их «необычными») и попытаемся понять, почему именно тот ответ, который кажется правильным, на самом деле ошибочен. Мы покажем, что очевидные, но неверные ответы опровергаются строгими математическими расчетами и рассуждениями.

Материалы и методы исследования

За последние десятилетия, если не сказать столетия, издано немало книг, в которых рассматриваются решения нестандартных и занимательных математических задач. Подборку можно начать с книги Клода Гасппра Баше «Игры и задачи, основанные на математике», которая вышла в России в далёком 1877 году. В дальнейшем Е.И. Игнатьев, Я.И. Перельман, Б.А. Кордемский, Щ. Еленский, Л. Кэролл, М. Гарднер и многие другие авторы пополнили копилку подобных задач.

Речь в статье, разумеется, не пойдет об обычных занимательных или нестандартных задачах, о задачах-шутках или затруднительных ситуациях, в которых ответ не так очевиден. Эти задачи широко известны. Некоторые из подобных задач тоже имеют неожиданный ответ. Приведем примеры.

1. Чтобы поджарить с двух сторон ломтик хлеба, требуется 60 секунд (по 30 секунд на каждую сторону). Мама очень вкусно поджаривает ломтики хлеба, пользуясь специальной маленькой сковородкой, на которой умещается рядом только два ломтика. Может ли она при этих условиях ухитриться поджарить обе стороны трех ломтиков за 90 секунд, а не за 120?

Решение. Мама сначала кладет два ломтика на сковородку и поджаривает одну их сторону в течение 30 секунд. Затем первый ломтик она переворачивает, а второй ломтик вынимает и кладет на его место третий. В итоге за следующие 30 секунд первый ломтик будет готов полностью, а третий наполовину. Таким образом, через минуту мама имеет один полностью поджаренный ломтик (первый) и два ломтика (второй и третий), каждый из которых готов наполовину. Их можно дожарить в течение следующих 30 секунд. Так что общее время 90 секунд, а не 120.

Ответ. Да, может.

2. Сегодня Павел дежурит на домашней кухне. Ему нужно как можно быстрее найти один гнилой (более легкий) грецкий орех среди 15 таких же орехов. Однако на кухне нет гирь для чашечных весов. За какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирь он может определить гнилой орех?

Решение. Сначала на чашечные весы надо положить по 7 орехов. Если они в равновесии, то оставшийся орех гнилой; если нет, то из более легкой кучки положить на весы по 3 ореха на каждую чашку весов; если они в равновесии, то оставшийся орех гнилой; если нет, то из более легкой кучки положить на весы по одному ореху на каждую чашу; если весы находятся в равновесии, то оставшийся орех гнилой; если нет, то более легкий (гнилой) орех на чаше, которая выше. Таким образом, надо 3 взвешивания.

Ответ. 3 взвешивания.

3. Помоги бабушке набрать из водопроводного крана ровно 7 л воды, имея банку вместимостью 4 л и бидон вместимостью 9 л?

Решение. Нальем в бидон с помощью банки 4 л воды, затем еще 4 л воды, в бидоне станет 8 л воды. Нальем в банку 4 л воды и из нее дольем бидон до 9 л. В бидоне станет 9 л воды, в банке останется 3 л воды. Выльем из бидона всю воду. Выльем из банки в бидон 3 л воды, нальем в банку 4 л воды и выльем её в бидон. В бидоне станет 7 л воды.

4. На огороде сидели 13 ворон. Одну ворону хозяин застрелил из ружья. Сколько ворон осталось на огороде?

Ответ. Одна, которую застрелил хозяин. Остальные улетели.

5. Два отца и два сына, а ещё и дед с внуком съели за завтраком три яйца, причём каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?

Ответ. Это были дед, отец, внук.

6. Сколько яиц можно съесть натощак?

Ответ. Только одно. Второе уже будет не натощак.

7. На березе выросло 70 яблок. Маша сорвала 20 яблок. Сколько осталось яблок на березе.

Ответ. Нисколько. На березе яблоки не растут.

8. Сколько месяцев в году имеют 28 дней?

Ответ. Все 12. В задаче не сказано, что «ровно 28 дней».

9. Как правильно сказать: «Пять плюс семь будет «одиннадцать» или «адиннадцать»?

Ответ. Двенадцать. Потому, что 5 + 7 = 12.

10. Как правильно сказать: «7 и 8 будет 14» или «7 плюс 8 равно 14»?

Ответ. Пятнадцать. Потому, что 7 + 8 = 15.

11. Тройка лошадей в одной упряжке проскакала 15 км. Сколько километров проскакала каждая лошадь?

Ответ. 15 км.

12. В мельнице было семь мешков, на каждом мешке сидело по три мыши. Пришел мельник с котом, сколько теперь стало ног?

Ответ. Две. У зверей не ноги, а лапы.

13. Что надо сделать, чтобы костер не горел?

Ответ. Не разжигать его.

14. Трое в лес пошли – 17 грибов нашли. Шестеро в лес пойдут – много ли грибов найдут?

Ответ. Может, ни одного.

15. Семь сестер находятся на даче, где каждая занята каким-то делом. Больше на даче никого нет. Первая сестра читает книгу, вторая смотрит телевизор, третья играет в шахматы, четвертая разгадывает судоку, пятая работает на компьютере, шестая рассматривает модные журналы. А чем занимается седьмая сестра?

Ответ. Играет в шахматы.

16. У крышки квадратного стола отпилили один угол. Сколько теперь углов у крышки стола?

Ответ. Не 3, а 5.

17. Сколько граней у шестигранного карандаша?

Ответ. Карандаш помимо 6 боковых граней имеет еще 2 «торцевые» грани. Если карандаш не очинен – граней 8. Если очинен – то 7.

18. Что тяжелее: 1 кг железа или 1 кг ваты?

Решение. Плотность железа гораздо больше плотности ваты. Поэтому на первый взгляд может показаться, что 1 кг железа тяжелее 1 кг ваты. Но на самом деле они равны! Масса то и там, и там 1 кг!

Ответ: Они равны.

В данной работе мы сосредоточимся на задачах (как известных, так и малоизвестных), в которых очевидный ответ неверен, и приведем правильные решения, позволяющие получить верные ответы, которые на первый взгляд кажутся неправдоподобными и сомнительными.

В обучении математике очевидные, но неправильные ответы играют важную роль. Они помогают учащимся исправлять свои ошибки, развивать умение анализировать и разбираться в математическом материале. Неверные ответы можно рассматривать как инструмент для лучшего понимания процесса решения [1], [10].

Некоторые задачи можно отнести к разным разделам математики. Мы старались задачу отнести к тому разделу, где по ее условию явно предпочтителен один из этих разделов. Скажем, задачу, в которой речь идёт о производительности труда и её изменении на какое-то количество процентов, мы относили к «Задачам на работу», а не к «Задачам на проценты и части». Хотя это деление условно.

В работе представлена только часть необычных задач, удивляющих своими ответами, которые взяты из различных разделов математики. Многие подобные задачи не вошли в данный обзор. Однако представленного набора необычных задач вполне достаточно, чтобы сделать вывод о необходимости изучения математики и ее применения в реальной жизни.

В большинстве случаев мы не указываем источники задач, так как происхождение многих из них установить практически невозможно. Некоторые задачи авторские [7], [8], [9].

Статья призвана на элементарном уровне продемонстрировать необходимость применения математики при решении не только прикладных задач, но и познавательных задач, решение которых расширяет кругозор, обогащает интересными фактами школьников и студентов, всех любителей математики.

Результаты и обсуждение

В данной статье мы приведем наиболее яркую подборку необычных задач, в которых очевидный ответ неверен. При этом приведем математические выкладки, подтверждающие несостоятельность предполагаемого ответа.

Некоторые представленные в статье задачи можно отнести к занимательным математическим задачам, часть – к логическим, часть – к нестандартным и т.п. Мы сделаем обзор задач, ответ в которых кажется очевидным, но по своей сути неверным. Подборку таких задач объединим одним термином - «необычные задачи».

Предложенная подборка необычных задач демонстрирует всю красоту математических рассуждений и выкладок, универсальность математики в решении многих бытовых, учебных и научных задач, которые постоянно возникают в нашей жизни.

Надеемся, что представленные задачи будут использоваться учителями математики и преподавателями вузов на текущих занятиях, в кружковой работе, при организации викторин, математических конкурсов и на других подобных мероприятиях. Полагаем, что всем любителям математики также будут интересны рассмотренные в статье задачи. Вдумчивый читатель может сам предложить аналогичные необычные задачи с очевидными ответами. Безусловно, в дальнейшем мы с интересом будем ждать новые необычные задачи с оригинальными сюжетами из других разделов математики.

I. Арифметические задачи. Арифметика – часть нашей повседневной жизни, которая используется при каждом крупном и даже мелком расчёте. Нереходко при проведении арифметических вычислений возникают ошибки, несмотря на то, что ответ на первый взгляд кажется очевидным.

Чтобы избежать таких ошибок в будущем, нужно внимательно читать задачу до конца и контролировать логику рассуждений и правильность вычислений, прежде чем давать ответ. Также стоит запомнить, что правила арифметики очень важны и, если их не соблюдать, можно получить неправильный ответ.

I.1. Сколько получится: а) десятков, если 5 десятков умножить на 4 десятка; б) сотен, если 5 сотен умножить на 4 сотни?

Решение. а) Очевидный ответ: 20 десятков – неверный. Действительно, 5 десятков – это число 50, а 4 десятка – это число 40. Видим, что 50·40 = 2 000. Число 2 000 – это 200 десятков.

б) Очевидный ответ: 20 сотен – конечно, тоже неверный. Действительно, 5 сотен – это число 500, а 4 сотни – это число 400. Видим, что 500·400 = 200 000. Число 200 000 – это 2 000 сотен.

Ответ. а) 200 десятков; б) 2000 сотен.

I.2. Может ли произведение двух натуральных чисел быть меньше суммы этих чисел?

Решение. Мы знаем, что 7·3 > 7 + 3, 4·15 > 4 + 15 и т.п. Поэтому очевидный ответ: нет. Правильный ответ: да. Например, 5·1 < 5 + 1.

Ответ. да.

I.3. Что больше: сумма всех целых неотрицательных чисел или их произведение?

Решение. Очевидный ответ: произведение – конечно, неверный. Больше сумма, так как произведение всех целых неотрицательных чисел равно нулю.

Ответ. сумма больше.

Дети, иногда совершенно не задумываясь над смыслом сказанного, могут заявить: «У меня миллион фантиков», «Я миллион раз могу подпрыгнуть на одной ноге», «В зоопарке я видел миллион птиц» и т.п. Они не понимают, насколько велико это число и сколько времени может уйти на то, чтобы пересчитать миллион фантиков или миллион раз подпрыгнуть на одной ноге.

Ниже мы рассмотрим необычные задачи, удивляющие своими ответами, которые нам пояснят, как велик миллион и как велик миллиард.

I.4. Павел похвастался своим друзьям, что он научился считать до 1 000 000. Друзья не поверили и попросили его назвать все числа подряд от 1 до 1 000 000. Павел заявил, что это займет много времени, может, даже несколько часов. Однако друзья настаивали на своей просьбе. Как вы думаете, смогут ли они быстро убедиться таким образом, что Павел действительно научился считать до 1 000 000? Сколько времени продлится их ожидание, если Павел будет каждую секунду называть одно число. Выберите ответ: а) не более 2-х часов; б) не более 12-ти часов; в) не более суток; г) более 11-ти суток.

А если потребуется назвать все числа до одного миллиарда? Хватит ли терпения у друзей дождаться конца счета?

Решение. Очевидные ответы – не более 2 часов или не более 12 часов – неверные. Действительно, чтобы назвать все числа от 1 до 1 000 000, Пете потребуется 1 000 000 секунд. В сутках 24 часа, в одном часу 60 минут, а в одной минуте 60 секунд. Поэтому, чтобы назвать все числа до миллиона потребуется 1 000 000 : (60·60·24) ≈ 11,6 (суток) непрерывного счета. Так что просьба друзей, скорее всего, невыполнима.

А вот чтобы назвать все числа до одного миллиарда потребуется 1 000 000 000 / (60·60·24·365) ≈ 32 года непрерывного счета. Тут уж никакого терпения не хватит!

Ответ. ≈ 11,6 суток до миллиона; ≈ 32 года до миллиарда.

I.5. Представьте себе, что вы сидите у окна, а мимо вас каждую секунду проезжает один автомобиль. Как долго вам придется сидеть у окна, чтобы насчитать 1 000 000 автомобилей? Больше, чем полдня, или меньше?

Решение задачи приведено в задаче **I.4**.

Ответ. почти 12 суток.

Следовательно, и для того, чтобы миллион раз подпрыгнуть на одной ноге, тоже понадобится не менее 11,5 суток.

I.6. Какой длины получится линия, если всех жителей Земли (примерно 8 000 000 000 человек) расставить вдоль нее на расстоянии 1 метр друг от друга? Выберите ответ: а) не больше расстояния от Москвы до Парижа, б) не больше расстояния от Москвы до Токио, в) не больше длины экватора Земли, г) больше расстояния от Земли до Луны. Расстояния расположены в порядке возрастания.

Решение. Очевидный ответ: не больше длины экватора Земли – неверный. В самом деле, реально потребуется 8 000 000 000 метров. А это – 8 000 000 км. Данное расстояние гораздо больше расстояния от Земли до Луны, которое составляет всего лишь 384 467 км, что в 20 раз меньше 8 000 000 км.

Ответ. г).

I.7. Какой участок Земли минимальной площади (из предложенных) надо предоставить всем жителям нашей планеты (примерно 8 000 000 000 человек), чтобы каждый занял 1 м^2 площади? Выберите ответ: а) Сибирь (13 100 000 км^2); б) Франция (551 695 км^2); в) Московская область (45 900 км^2), г) Кипр (9 251 км^2).

Решение. Очевидный ответ: б) Франция – неверный. Реально потребуется 8 000 000 000 квадратных метров. А это – 8 000 км^2. Ясно, что территории Кипра хватит.

Ответ. г).

I.8. (Легенда об изобретателе шахмат) Мудрец, который изобрел шахматы, принёс их Царю и объяснил правила, как играть. Игра Царю очень понравилась, и он спросил, что хочет Мудрец за своё изобретение. Мудрец ответил: «Дай мне пшеницу: на 1-ю клетку шахматной доски положи 1 зерно, на 2-ю клетку – 2 зерна, на 3-ю клетку – 4 зерна, и т.д., на каждую клетку – вдвое больше, чем на предыдущую».

Царь решил, что плата не очень высокая, велел посчитать все зерна и тут же выдать их Мудрецу. Сколько потребуется Царю мешков, чтобы в них насыпать всю пшеницу с шахматной доски? Выберите ответ: а) не более 1 мешка; б) не более 10 мешков; в) не более 1 000 мешков г) не более 1 000 000 000 мешков; д) более 1 000 000 000 000 000 мешков.

Решение. Очевидные ответы – не более 1 мешка или не более 10 мешков – неверные. В самом деле, всего зерен на шахматной доске будет: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots 2^{63} = 2^{64} – 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$ – восемнадцать квинтильонов четыреста сорок шесть квадрильонов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три миллиарда семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать. Оказывается, нужно засеять всю Землю и собирать урожай в течение нескольких тысяч лет, чтобы выдать Мудрецу, то, что он попросил [2].

Ответ. более 1 000 000 000 000 000 мешков.

Легенда очень поучительная: нужно подумать и всё просчитать, прежде чем на что-то соглашаться. А очевидный ответ появился от незнания того, что при удвоении числа растут намного быстрее, чем это кажется сначала.

Похожая задача, тоже удивляющая своим ответом, представлена в легенде о римском императоре и полководце Теренции [3].

I.9. Кувшинки на поверхности пруда за сутки увеличивают площадь зарастания в 2 раза. За 28 дней покрылась этими водорослями вся площадь пруда. Сколько дней потребуется кувшинкам, чтобы покрыть половину пруда?

Решение. Очевидный ответ: «28:2 = 14 (дней)» неверный. Рассуждая логически, исходя из того, что каждый день число кувшинок удваивается, приходим к выводу, что за 27 дней их количество будет в два раза меньше, чем за 28 дней, то есть они будут занимать площадь в 2 раза меньшую.

Ответ. за 27 дней.

I.10. Пруд в деревне зарастает ряской. Каждый день площадь заросшей части пруда удваивается. Весь пруд зарос за 36 дней. Павел, взглянув на пруд, заявил, что половина пруда заросла за 36 : 2 = 18 дней, а четверть пруда – за 36 : 4 = 9 дней. Верно ли он рассуждает?

Решение. Очевидный ответ: да, верно – неправильный. В самом деле если весь пруд зарос за 36 дней, а каждый день площадь заросшей части пруда удваивается, то половина пруда зарастет за 35 дней, а значит, четверть – за 34 дня.

Ответ: Нет, неверно. Половина пруда заросла за 35 дней, а четверть – за 34 дня.

I.11. На складе хранятся сухари. Каждую ночь местные мыши съедают ровно половину сухарей, которые есть в наличии (их всегда целое число!). К концу 8-й ночи сухарей не осталось (съели последний сухарь). К концу какой ночи мыши съели половину первоначального запаса сухарей?

Решение. Очевидный ответ: к концу четвертой ночи (8 : 2 = 4). Он неверный. Если не торопиться и немного подумать, то совершенно ясно, что половина первоначального запаса сухарей будет съедена в первую ночь.

Ответ: к концу первой ночи.

I.12. Каждая амёба через минуту делится на две. Биолог кладет в пробирку одну амёбу, и через 36 минут в пробирке получает 100 миллиграммов амёб. Затем он берет четыре пробирки и кладет в каждую из них одну амёбу. Через какое время во всех пробирках суммарно будет 100 миллиграммов амёб?

Решение. Очевидный ответ: «в 4 раза быстрее, т.е. 36:4 = 9 (дней)». Он неверный. В самом деле, взяв 4 пробирки сразу, биолог тем самым сокращает время получения суммарной массы 100 миллиграмм на 2 минуты.

Ответ: через 34 минуты.

I.13. Каждая амёба через минуту делится на две. Биолог кладет в пробирку одну амёбу, и через час вся пробирка оказывается заполненной амёбами. Сколько потребуется времени, чтобы вся пробирка заполнилась амёбами, если в нее биолог сначала положил не одну амёбу, а две?

Решение. Очевидный ответ: полчаса (60 мин : 2 = 30 мин) – неверный. В самом деле, положив в пробирку сразу 2 амёбы, мы сокращаем время наполнения пробирки на 1 минуту.

Ответ: 59 минут.

I.14. На волшебном дереве растут золотые монеты: в первый день на дереве вырастает 1 монета, а в каждый последующий день количество монет увеличивается в 3 раза. За 6 дней сундук у Буратино наполнился монетами с этого дерева. Если Буратино воспользуется тремя такими деревьями сразу, то за сколько дней он наполнит свой сундук?

Решение. Очевидный ответ: в 3 раза быстрее, то есть за 2 дня – неверный. Если не торопиться и немного подумать, то совершенно ясно, что сундук наполнится за 5 дней. В самом деле, воспользовавшись тремя деревьями сразу, мы получим в первый день вместо одной монеты три, как во второй день, когда дерево было одно. То есть мы выиграем только один день.

Ответ: 5 дней.

I.15. На волшебном дереве растут золотые монеты: в первый день на дереве вырастает 1 монета, а в каждый последующий день количество монет увеличивается в 2 раза. Буратино знает, что, выращивая одно волшебное дерево, он сможет заполнить свой большой сундук золотыми монетами только спустя 16 дней. Спустя сколько дней Буратино заполнит свой сундук, выращивая четыре таких волшебных дерева?

Решение. Очевидный ответ: в 4 раза быстрее, т.е. за 4 дня. Однако это не так. Приведем правильное решение. Если у Буратино есть одно дерево, то в 1-й день он получит 1 монету, во 2-й день – 2 монеты, в 3-й день – 4 монеты, в 4-й день – 8 монет… . Видим, что мы имеем геометрическую прогрессию с первым членом b_1 = 1, с знаменателем q = 2. Найдем сумму 16 первых членов геометрической прогрессии. Для этого воспользуемся формулой: $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. В нашем случае $S_{16} = \frac{1(2^{16}-1)}{2-1}$ = 65 535. Итак, спустя 16 дней в сундуке будет 65 535 монет.

Если у Буратино растет 4 дерева, то в 1-й день он получит 4 монеты, во 2-й день – 8 монет, в 3-й день – 16 монет, в 4-й день – 32 монеты… . Видим, что мы имеем геометрическую прогрессию с первым членом b_1 = 4 и знаменателем q = 2. Теперь, опять воспользовавшись формулой $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, найдем, через сколько дней Буратино с 4-х деревьев соберет 65 535 монет. Для этого решим уравнение: $65\,535 = \frac{4(2^n-1)}{2-1}$. После несложных преобразований получим:

$65535 = 4\cdot(2^n - 1) \Rightarrow 4\cdot 2^n = 65539 \Rightarrow 2^n = 16\,384{,}75 \Rightarrow 2^n = 16\,384 \Rightarrow n = 14.$

Для упрощения решения уравнения (для получения целого значения n) мы заменили 16 384,75 на 16 384. Нашли n = 14. Видим, что $S_{14} = \frac{4(2^{14}-1)}{2-1}$ = 65 532, то есть спустя 14 дней Буратино с 4-х деревьев соберет 65 532 монеты. Значит, 65 535 монет у него будет на 15-й день. Это не 4 дня, как утверждалось в очевидном ответе.

Ответ: на 15-й день.

II. Текстовые задачи. Задачи на проценты и части. Проценты и части – одна из наиболее популярных тем в математике. Однако даже у многих людей, которые уже закончили школу или высшее учебное заведение, могут возникать трудности с решением подобных задач. Задачи на проценты и части – отдельный вид задач, в которых очевидный ответ, как правило, бывает неправильным. Полагаясь на него, многие получают заведомо неверные решения. Рассмотрим примеры.

II.1. Стоимость продукта увеличилась на 20%, а затем снизилась на 20%, Какова процентная потеря?

Решение. Очевидный ответ: 20% – 20% = 0% – конечно, ошибочный. Правильным ответом будет не 0%, а фактический процентный убыток, который в данной задаче равен 4%. Идея заключается в том, что увеличение на 20% означает, что конечная цена стала равна 120% от исходной цены. После снижения на 20%, цена снизится на 20% от 120%, то есть на 24%. Итак, новая цена составит 96% от исходной цены, что означает процентный убыток в 4%.

Ответ: 4%.

II.2. В павильон, торгующий цветами, привезли 60 красных тюльпанов и 140 желтых. Сначала продавец решил продавать по 3 красных тюльпана за 20 рублей и по 2 желтых тюльпана за 30 рублей. Однако он сложил все эти тюльпаны вместе и стал делать букеты по 5 тюльпанов и продавать их по 50 рублей, решив, что и в этом случае он выручит те же деньги. Правильно ли он рассчитал?

Решение. Очевидный ответ: конечно, правильно. Однако это не так. Посчитаем выручку продавца в том случае, если бы он не складывал тюльпаны вместе:

60 · 20 : 3 + 140 · 30 : 2 = 2 500 (рублей).

Посчитаем выручку продавца в том случае, когда он сложил их по 5 в букеты и стал продавать по 50 рублей:

(60 + 140) · 50 : 5 = 2 000 (рублей).

Теперь ясно, что расчет продавца ошибочен, т.к. при сложении всех тюльпанов и продаже их по 5 штук в букетах он теряет 500 рублей!

Ответ: нет, неправильно.

II.3. Два фермера привезли на рынок арбузы. У каждого из них было по 300 арбузов. Первый собирался продавать пару арбузов за 50 рублей, второй – три арбуза за 60 рублей. Первый рассчитывал выручить от продажи 7 500 рублей, второй – 6 000 рублей, а оба вместе – 13 500 рублей. Сложив арбузы в одну кучу, они решили продавать 5 арбузов за 110 рублей, рассуждая, что если один продаст два арбуза за 50 рублей, второй – три арбуза за 60 рублей, то это все равно, что продать 5 арбузов за 110 рублей. Правильно ли они поступили?

Решение. Очевидный ответ: да, правильно. Однако это не так. Дело в том, что фермеры упустили из виду одно обстоятельство. Сложив арбузы, предназначавшиеся к продаже по двум различным ценам, и, продавая их сообща, они продавали арбузы уже по другой цене, чем прежде. В самом деле, каждый арбуз первого фермера стоил 25 рублей, а каждая арбуз второго фермера – 20 рублей. Когда же они стали продавать арбузы вместе (5 арбузов за 110 рублей), то каждый арбуз стоил уже 22 рубля. Из-за этого фермеры недополучат 300 рублей. Однако первый из них понесет убыток в размере 900 рублей, а второй получит доход 600 рублей.

Ответ: нет, неправильно.

II.4. Три приятеля сделали шашлыки. Первый принес 2 кг мяса, второй – 1 кг, третий – ни одного, но он расплатился, отдав 99 рублей. Как должны поделить между собой деньги первые два приятеля?

Решение. Очевидный ответ: первому приятелю – 66 р., второму – 33 р. – конечно, неверный. В самом деле, на каждого приятеля приходится по 1 кг мяса. Получается, что первый приятель 1 кг мяса отдаёт третьему. Взамен он должен получить все 99 рублей!

Ответ: первый приятель должен получить 99 рублей.

II.5. В походе три туриста использовали 8 коробок спичек. У первого из них было 5 коробок, у второго - 3; третий же не имел спичек, и он дал двум своим товарищам 8 рублей. Как должны распределить между собой эти деньги два первых туриста?

Решение. Очевидный ответ: первому туристу – 5 р., второму – 3 р. – конечно, неверный. В самом деле, восемь коробок спичек разделены на троих поровну, значит, каждый использовал 8/3 коробки. У первого туриста было 5 коробок, он использовал 8/3 коробки, следовательно, третьему он отдал 5 – 8/3 = 7/3 коробки. Второй турист из своих трех коробок спичек использовал тоже 8/3 коробки, следовательно, третьему он отдал 3 – 8/3 = 1/3 (одну треть) коробки. Третий использовал 8/3 коробки и заплатил за них 8 рублей, значит, за каждую треть коробки он отдал по рублю. У первого он взял семь третей, у второго - одну треть; поэтому, первый должен взять себе 7 рублей, а второй - 1 рубль.

Ответ: первый турист должен взять себе 7 рублей, а второй – 1 рубль.

II.6. Цену товара увеличили на 25%. На сколько процентов надо уменьшить новую цену товара, чтобы получить первоначальную.

Решение. Очевидный ответ: на 25% – неверный. В самом деле, пусть первоначальная цена товара равна A. Тогда новая цена равна $1{,}25A$. Чтобы определить, сколько процентов старая цена составляет от новой составим пропорцию:

$$\begin{array}{ccc} 1{,}25A & – & 100\% \\ A & – & x\% \end{array}$$

Из полученной пропорции находим $x = A\times100\% : 1{,}25A = 80\%$. Таким образом, новую цену нужно уменьшить на 20%.

Ответ: 20%.

II.7. Цену товара увеличили на 40%, а его количество уменьшили на 40%. Изменится ли стоимость товара?

Решение. Очевидный ответ: не изменится. Но это не так. В самом деле стоимость товара $S = c\cdot k$, где c – цена товара, k – его количество. Увеличив цену товара на 40%, а его количество уменьшив на 40%, получим $S = 1.4c0.6k = 0.84ck$. То есть стоимость товара уменьшится на 16%.

Ответ: уменьшится на 16%.

II.8. Плотность газа в воздушном шаре увеличили на 30%, а объем уменьшили на 30%. Изменится ли масса воздуха в шаре?

Решение. Очевидный ответ: не изменится. Но это не так. Действительно, масса вычисляется по формуле: $M = p\cdot v$, где v – объем шара, p – плотность газа. Увеличив плотность на 30% и уменьшив объем на 30%, получим $M = 1.3p\cdot 0.7v = 0.91pv$. То есть на самом деле масса уменьшится на 9%.

Ответ: изменится, уменьшится на 9%.

II.9. В одной бочке 100 л чистой воды, в другой – 100 л чистого спирта. Из первой бочки перелили 10 л воды во вторую, перемешали раствор и перелили 10 л смеси обратно. Чего больше: воды в спирте или спирта в воде?

Решение. Очевидный ответ: воды в спирте больше, так как воды перелили 10 л, а спирта перелили меньше 10 л (в смеси была вода). Однако этот ответ неверный. Действительно, пусть в результате переливаний в первой бочке оказалось x литров спирта. Так как в ней всего 100 л, то воды в ней $(100 – x)$ литров. Значит, во второй бочке осталось $(100\ 000 – x)$ литров спирта. Поэтому воды в ней тоже x литров. Так что воды в спирте столько же, сколько спирта в воде.

Ответ: поровну.

II.10. В 100%-й раствор спирта добавили воды и снизили концентрацию спирта на 75%. На сколько процентов увеличился объем раствора?

Решение. Очевидный ответ: на 75%. Но это не так. В самом деле, пусть первоначальный объем спирта равен A литров. После того как в раствор добавили воду, этот объем стал составлять 25%. Пусть в раствор добавили x литров воды. Составим пропорцию:

$$\begin{array}{lcl} x+A & – & 100\% \\ A & – & 25\% \end{array}$$

Из полученной пропорции находим $25x = 75A$, $x = 3A$. Значит, объем раствора увеличился на 300% .

Ответ: на 300%.

II.11. Влажность винограда 90%. После того, как его доставили на рынок, влажность уменьшилась на 10%. На сколько процентов уменьшилась масса винограда?

Решение. Очевидный ответ: на 10%. Но это не так. Путь A – масса винограда. Тогда в нем $0,1A$ – масса сухого вещества, $0,9A$ – масса воды. Влажность стала 80%, следовательно, теперь на сухое вещество приходится 20%.

Пусть x – новая масса винограда. Составим пропорцию:

$$\begin{array}{lcl} 0,1A & – & 20\% \\ x & – & 100\% \end{array}$$

Откуда находим $x = (0,1A\cdot 100)/20 = 0,5A$. Видим: новая масса стала в 2 раза меньше первоначальной, т.е. составляет 50% от первоначальной.

Ответ: на 50%.

II.12. Пусть имеется 100 кг помидоров, имеющих 99% воды по массе. Помидоры высушивают и получают 98% процентов воды. Какая теперь масса помидоров?

Решение. Очевидный ответ: масса помидоров изменится совсем незначительно и станет равна если не 99 кг, то не менее чем 90 кг. Однако дальнейшие рассуждения показывают, что это не так. Действительно, пусть в начале у нас было 100 кг помидоров, состоящих из 99 кг воды и 1 кг сухого вещества. Таким образом, соотношение вода/сухой остаток равнялось 1/99. Теперь, если процент воды уменьшится до 98%, сухого вещества останется 2% от массы. Соотношение вода/сухой остаток равно

1/49. Ключевой момент: масса сухого вещества как была равна 1 кг, так и остается. Таким образом, в полученной смеси мы имеем 49 кг воды и 1 кг сухого вещества: в общей сложности 50 кг.

Ответ. 50 кг.

III.Текстовые задачи. Задачи на движение. Чтобы правильно решить текстовые задачи на движение, нужно внимательно читать условия и уточнять, если что-то неясно. Никогда не принимайте само собой разумеющуюся формулировку и не допускайте предположений о деталях задачи, которые не были указаны явно. Только тщательный анализ условий и выявление всех необходимых факторов может привести к правильному ответу.

III.1. Дима и Андрей одновременно отправились из школы в городскую библиотеку. Дима половину времени, затраченного им на дорогу, шел со скоростью 5 км/час, а затем пошел со скоростью 4 км/час. Андрей же первую половину пути прошел со скоростью 4 км/час, а затем пошел со скоростью 5 км/час. Дети в библиотеку пришли одновременно?

Решение. Очевидный ответ: да, одновременно. Но это не так. Для обоих детей одинаково пройденное расстояние. Дима половину времени шел со скоростью 5 км/ч, а значит, он с большей скоростью прошел больше половины пути. Андрей же ровно половину пути прошел с большей скоростью, значит, Дима потратил времени меньше.

Ответ. Дима.

III.2. Скорость тела увеличили на 20%, а время движения уменьшили на 20%. Изменится ли расстояние, которое пройдет тело?

Решение. Очевидный ответ: не изменится. Но это не так. В самом деле, пройденный путь вычисляется по формуле: $S = vt$, где v - скорость движения, t - время движения. Увеличив скорость на 20% и уменьшив время движения на 20%, получим $S = 1.2v\ 0.8t = 0.96vt$. То есть на самом деле расстояние, которое пройдет тело, уменьшится на 4%.

Ответ. уменьшится на 4%.

III.3. Скорость тела увеличили на 20%, а расстояние, которое надо пройти, уменьшили на 20%. Как изменится время движения?

Решение. Очевидный ответ: уменьшится на 40%. Но это не так. В самом деле, время в пути вычисляется по формуле: $t = \frac{S}{v}$, где S – пройденный путь, v – скорость движения. Увеличив скорость на 20% и уменьшив расстояние, которое надо пройти, на 20%, получим $t = \frac{0,8S}{1,2v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{v} \approx 0.67 \cdot \frac{S}{v}$. Следовательно, на самом деле время уменьшится примерно на 33%.

Ответ. уменьшится примерно на 33%.

III.4. Поезд длиной 300 метров движется со скоростью 300 метров в минуту и должен пройти через тоннель длиной в 300 метров. За какое время поезд проедет тоннель?

Решение. Очевидный ответ: 1 минута. Но это не так. Потребуется 2 минуты, потому что передней части поезда требуется одна минута, а остальной части поезда потребуется тоже еще одна минута, чтобы пройти весь тоннель.

Ответ. 2 минуты.

III.5. Определите среднюю скорость автомобиля, если половину пути он ехал со скоростью 60 км/час, а другую 40 км/час.

Решение. Очевидный ответ: (40+60): 2 = 50 км/час – конечно, неверный. Приведем правильное решение задачи. Примем половину расстояния от А до В за 1. Тогда время прохождения первой половины пути равно 1/60, второй половины - 1/40. Следовательно, средняя скорость равна 2/(1/60 + 1/40) = 48 (км/час).

Ответ. 48 км/час

III.6. Водитель автобуса из *A* в *B* всегда ездил со скоростью 50 км в час. *A* сегодня он первую половину пути из-за поломки проехал со скоростью 30 км в час. Вторую половину пути он решил ехать быстрее со скоростью 70 км/час и решил, что в *B* он приедет вовремя. Ведь (30 км/час + 70 км/час) : 2 = 50 км/ час. Верно ли рассуждал водитель?

Решение. Очевидный ответ: да, конечно. Но он неверный. Правильный ответ: нет, неверно. Решение задачи аналогично решению задачи **III.5**.

Ответ. нет, неверно. Средняя скорость равна 42 км/час.

III.7. Турист летел из пункта *A* в пункт *B* на самолёте со скоростью 900 км/час. Обратно из *B* в *A* возвращался на поезде со скоростью 100 км/час. Какова средняя скорость движения туриста из *A* в *B* и обратно?

Решение. Очевидный ответ: (900+100) : 2 = 500 (км/час). Но он не верный. Решение задачи аналогично решению задачи **III.5**.

Ответ. 180 км/час.

III.8. Автобус по расписанию из пункта *A* в пункт *B* с постоянной скоростью проезжает за определенное время. Однажды автобус половину пути из *A* в *B* проехал со скоростью в 2 раза меньшей. Тогда водитель автобуса решил вторую половину пути ехать со скоростью в 2 раза большей, чтобы вовремя прибыть в *B*. Верно ли он рассуждал?

Решение. Очевидный ответ: да, конечно. Но это не так. В самом деле, примем половину расстояния от *A* до *B* за 1, постоянную скорость автобуса за *v*. Тогда: время прохождения всего пути от *A* до *B* равно $\frac{2}{v}$, время прохождения первой половины пути равно $\frac{2}{0,5v}$, второй половины – $\frac{2}{2v}$. Следовательно, общее время движения равно $\frac{2}{0,5v}$ + $\frac{2}{2v}$ = $\frac{2,5}{v}$. Что в 1,25 раза больше нормы.

Ответ. нет, неверно.

III.9. Студент в институт каждый день выходит из дома в одно и то же время и идёт с постоянной скоростью. Однажды половину пути из дома в институт он прошел со скоростью в 2 раза большей. Тогда студент решил вторую половину пути идти со скоростью в 2 раза меньшей, чтобы в обычное время придти в ВУЗ. Верно ли он рассуждал?

Решение. Конечно, студент в этом случае рассуждал неверно. Он опоздает. Хотя очевидный ответ: да, придет в обычное время. Но это не так. Решение данной задачи аналогично решению задачи **III.8**.

Ответ. нет, неверно.

III.10. Скорость реки весной больше скорости реки летом. В какое из этих времён года лодка проплывает расстояние по реке от пункта А до пункта В и обратно быстрее? А может, это время одно и то же и весной, и летом?

Решение. Очевидный ответ: одно и то же. Но это не так. Верный ответ: летом быстрее. И вот почему. Пусть *v* – скорость лодки в стоячей воде, *w* – скорость течения. Значит, (*v* + *w*) – скорость лодки по течению, а (*v* – *w*) – скорость лодки против течения. Примем расстояние от *A* до *B* за 1. Тогда время прохождения всего пути от *A* до *B* и обратно равно $\frac{1}{v+w}$ + $\frac{1}{v-w}$ = $\frac{2v}{v^2-w^2}$.

Видим, что при постоянной скорости лодки в стоячей воде (*v*) это время будет больше, когда разность (v^2 – w^2) будет меньше. А это достигается, когда скорость течения (*w*) будет больше. Скорость реки весной больше скорости реки летом. Поэтому летом лодка расстояние от пункта *A* до пункта *B* и обратно преодолеет быстрее, чем весной.

Ответ. летом быстрее.

IV. Текстовые задачи. Задачи на работу. Ключевым моментом при решении текстовых задач на работу является не только знание и умение применять определенные приемы решения, но и аналитическое мышление и внимательность к деталям. Избежать ошибок можно, если читать задачу внимательно, анализировать информацию, изучать контекст задачи, не спешить и быть внимательным к формату задачи. Все эти моменты помогут успешно решить любую текстовую задачу на работу.

IV.1. Шесть рыбаков съели шесть судаков за шесть дней. За сколько дней 10 рыбаков съедят 10 судаков?

Решение. Очевидный ответ: за 10 – неверный. Действительно, если шесть рыбаков съели шесть судаков за шесть дней, то один рыбак съедает одного судака за 6 дней. Значит, 10 рыбаков съедят 10 судаков тоже за 6 дней.

Ответ: за 6 дней.

IV.2. Два землекопа выкапывают 2 м канавы за 2 ч. Сколько землекопов за 5 ч выкопают 5 м канавы?

Решение. Очевидный ответ: 5 землекопов – конечно, неверный. Действительно, если два землекопа выкапывают 2 м канавы за 2 ч., то эти же 2 землекопа 1 м канавы выкопают за 1 час. Значит, за 5 часов они выкопают 5 м канавы.

Ответ: 2.

IV.3. За 10 часов 10 человек могут выкопать траншею длиной в 10 метров. Сколько нужно человек, чтобы они выкопали траншею диной в 100 метров за 100 часов?

Решение. Очевидный ответ: 100 человек – неверный. Действительно, за 1 час 10 человек выкопают 1 метр траншеи, за 10 часов они выкапывают 10 метров траншеи, а за 100 часов – 100 метров.

Ответ: 10 человек.

IV.4. Если производительность первого рабочего увеличить в два раза, а производительность второго уменьшить в 2 раза, то их совместная производительность не изменится. Верно?

Решение. Очевидный ответ: да, не изменится. Но это не так. Пусть p – производительность первого рабочего, q – производительность второго. Тогда их совместная производительность $p+q$, а новая производительность $2p+0.5q = p+q + (p–0,5q)$. Видим, что совместная производительность не изменится только в том случае, когда производительность первого в 2 раза меньше производительности второго. Во всех остальных случаях производительность изменится. Причем она увеличится, если производительность первого больше уменьшенной в 2 раза производительности второго. И уменьшится, если производительность первого меньше уменьшенной в 2 раза производительности второго.

Ответ: нет, неверно.

IV.5. Объем работы увеличили на 20%, а производительность труда упала на 20%. На сколько процентов увеличилось время выполнения работы?

Решение. Очевидный ответ: на 40% увеличилось время выполнения работы – конечно, неверный. Приведем правильное решение задачи. В самом деле, время выполнения работы вычисляется по формуле: $t = \frac{A}{P}$, где A – работа, P – производительность. Увеличив объем работы на 20% и уменьшив производительность на 20%, получим $t = \frac{1,2A}{0,8P} = \frac{3}{2} \cdot \frac{A}{P} = 1,5 \cdot \frac{A}{P}$. Следовательно, на самом деле время увеличится на 50%.

Ответ: увеличится на 50%.

IV.6. Работу уменьшили на 20%, а производительность увеличили на 20%. На сколько процентов уменьшилось время выполнения работы?

Решение. Очевидный ответ: на 40% уменьшилось время выполнения работы – неверный. Приведем правильное решение задачи. В самом деле, время выполнения работы вычисляется по формуле: $t = \frac{A}{P}$, где A – работа, P – производительность. Увеличив производительность на 20% и уменьшив работу на 20%, получим $t = \frac{0,8A}{1,2P} = \frac{2}{3} \cdot \frac{A}{P} \approx 0.67 \cdot \frac{A}{P}$. Следовательно, на самом деле время уменьшится примерно на 33%.

Ответ: уменьшится примерно на 33%..

IV.7. Время работы увеличили на 20%, а производительность упала на 20%. Как изменится выполняемая работа?

Решение. Очевидный ответ: не изменится. Но это не так. В самом деле, выполненная работа вычисляется по формуле: $A = Pt$, где P - производительность, t - время выполнения работы. Увеличив время на 20% и уменьшив производительность на 20%, получим $A = 0.8P \cdot 1.2t = 0.96Pt$. То есть на самом деле выполняемая работа уменьшится на 4%.

Ответ: уменьшится на 4%.

IV.8. Первый и Второй рабочий справляются с работой за 2 дня. Первый и Третий – за 10 дней, Второй и Третий – за 15 дней. Ирина считает, что втроем они выполнят работу не менее, чем за 5 дней, а Марина – не менее, чем за 10 дней, Арина утверждает, что втроём они справятся с этой работой менее, чем за два дня. Кто из детей прав?

Решение. Очевидный ответ: за 9 дней, так как (2+10+15) : 3 = 9. Но этот ответ неверный. Ведь вдвоем Первый рабочий и Второй рабочий справятся за два дня. А тогда, когда с ними будет работать и Третий рабочий, то втроём они справятся с работой даже меньше, чем за 2 дня. Так что, Арина права.

Ответ: права Арина.

IV.9. Первоначально производительности двух бригад лесорубов одинаковые. Первая бригада уменьшила свою производительность на 20%, а Вторая – увеличила на 20%. а) На сколько процентов Первая бригада должна увеличить свою новую производительность, чтобы она стала равна новой производительности Второй бригады? б) На сколько процентов Вторая бригада должна уменьшить свою новую производительность, чтобы она стала равна новой производительности Первой бригады?

Решение. Очевидный ответ в задаче а): 40%. Хотя это далеко не так. В самом деле. Пусть A – первоначальные производительности бригад. Тогда после их изменений производительность Первой бригады стала равна $0,8A$, а второй – $1,2A$. Примем новую производительность Первой бригады за 100% и составим пропорцию:

$$0,8A \quad – \quad 100\%$$
$$1,2A \quad – \quad x\%$$

Из этой пропорции находим $x = 1,5A$. Значит, увеличить надо на 150%. – 100%. = 50%.

Совершенно аналогично находим ответ на вопрос б). Ответ: 100/3% ≈ 33,3%. Хотя очевидным здесь тоже кажется ответ: 40%.

Ответ: а) 50%; б) ≈ 33,3% .

V. Геометрические задачи. Планиметрические задачи. Планиметрические задачи – это задачи, связанные с геометрией плоских фигур. Они всегда требуют аналитического мышления, логического размышления и умения работать с фигурами. Впрочем, порой для решения задачи нужно все-таки не только продумать математический алгоритм, но и использовать здравый смысл. В этой статье мы рассмотрим несколько примеров задач, где помогут не «хитрые» рассуждения, а очевидные, простые соображения.

Возможно, на первый взгляд эти способы решения задач кажутся слишком простыми и элементарными, но не стоит забывать, что иногда простые соображения могут дать более точный и быстрый результат, чем формулы и сложные вычисления. Главное – это постоянно тренировать свой ум и интуицию, уметь четко формулировать задачу и быть внимательным к деталям.

V.1. Лупа даёт четырёхкратное увеличение. Каким будет угол величиной 1°, рассматриваемый через лупу?

Решение. Очевидный ответ: 4°. Но это не так. Увеличение лупы никак не влияет на взаимную ориентацию линий. Поэтому величина угла при рассматривании через лупу не изменится.

Ответ. 1°.

V.2. Одну сторону прямоугольника увеличили на 50%, о другую уменьшили на 50%. Изменится ли его площадь?

Решение. Очевидный ответ: нет. Но это не так. В самом деле, пусть стороны прямоугольника (высота, ширина) равны a, b. Тогда его площадь $S = ab$. При изменении длин сторон его площадь станет равна $S = 1{,}5a \cdot 0{,}5b = 0.75ab$. Видим, что площадь уменьшилась на 25%.

Ответ. уменьшится на 25% .

V.3. Дачник посадил картофель на участке, имеющем форму прямоугольника, стороны которого равны 7 м и 5 м. В следующем году он решил увеличить стороны этого участка в 2 раза, и запланировал приобрести в 2 раза больше картофеля для посадки. Правильно ли он запланировал количество картофеля для посадки?

*Решение***.** Очевидный ответ: да, правильно. Однако, это не так.

Решим эту задачу по действиям:

1) 7 × 5 = 35 (м²) – первоначальная площадь участка;

2) 7 × 2 = 10 м – ширина нового участка;

3) 5 × 2 = 14 м – длина нового участка;

4) 10 × 14 = 140 м² – площадь нового участка;

5) 140 : 35 = 4 (раза) – во столько раз площадь нового участка больше площади старого участка.

Итак, площадь нового участка больше площади старого участка в 4 раза. Значит, и на посадку потребуется картофеля в 4 раза больше.

Ответ. нет, неправильно.

При решении подобных задач нужно пользоваться теоремой «Если линейные размеры фигуры увеличили (уменьшили) в k раз, то площадь фигуры увеличится (уменьшится) в k^2 раз». Вот примеры задач, при решении которых используется данная теорема.

V.4. Стороны квадрата уменьшили в 3 раза. Во сколько раз уменьшится его площадь?

Решение. Очевидный ответ: в 3 раза – неверный. На самом деле, видим, что линейные размеры квадрата уменьшились в 3 раза. Значит, его площадь уменьшится в 3^2 раз, то есть в 9 раз.

Ответ. в 9 раз.

V.5. Можно ли равносторонний треугольник накрыть двумя равносторонними треугольниками, немного меньшего размера.

*Решение***.** Очевидный ответ: можно, т.к. сумма их площадей почти в 2 раза больше площади данного. Но это не так. Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины данного треугольника. Следовательно, полностью большой треугольник этими двумя меньшими треугольниками накрыть нельзя.

Ответ. нельзя.

V.6. Всегда ли можно квадрат со стороной 1 см накрыть четырьмя прямоугольниками, площади которых равны 1 см^2?

Решение. Очевидный ответ: можно всегда, т.к. сумма площадей прямоугольников в 4 раза больше площади данного квадрата. Ответ неверный. Возьмём прямоугольники размером 5 см $\times$ 0,2 см. Явно ими квадрат не накроем.

Ответ: нет, не всегда.

V.7. Существует ли треугольник, площадь которого равна 1 мм^2, а все стороны больше 1 км?

Решение. Очевидный ответ: нет, не существует. Но это не так. В самом деле, пусть длина основания равнобедренного треугольника равна 5 км. Тогда ясно, что его боковые стороны больше 2,5 км.

Площадь треугольника вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}ah$, где a – основание, h – высота. Считая, что S = 1мм^2, a = 5 км, найдем высоту h. Учитывая, что 5 км = 5 000 000 мм, получим уравнение:

$$1\text{мм}^2 = \frac{1}{2}5\,000\,000\text{ мм}\cdot h.$$

Откуда находим $h = 4\cdot 10^{-7}$ мм.

Итак, видим, что треугольник, все стороны которого больше 1 км, а площадь равна 1 мм^2, существует. Только у него очень маленькая высота, проведенная к основанию.

Ответ: да, существует.

VI. Геометрические задачи. Стереометрические задачи. В задачах стереометрии есть много подводных камней, которые могут приводить к ошибкам. Один из наиболее распространенных видов ошибок - это очевидные, но неправильные ответы. Чтобы избежать подобных ошибок, важно не только следовать своей интуиции, но и внимательно анализировать условие задачи, правильно аппроксимировать фигуру и строго придерживаться формул для расчета объемов.

VI.1. Три пчелы вылетели из улья. Всегда ли они могут находиться в одной плоскости?

Решение. Очевидный ответ: нет, не всегда, потому что пчелы летают в разных направлениях с разными скоростями и не всегда могут оказаться в одной плоскости. Однако это не так. Есть аксиома стереометрии о том, что через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна. В данном случае можем принять пчёл за некоторые точки в пространстве. Таким образом, куда бы они не летали (или где бы они не сидели) они всегда будут находиться в одной плоскости.

Ответ: всегда.

VI.2. Какой стул более устойчив: на трёх ножках или на четырех?

Решение. Очевидный ответ: на четырех. Но это не так. Мы знаем, что любые три точки всегда лежат в одной плоскости. Поэтому три ножки стула всегда найдут себе опору на любом полу, а четвертая может и не лежать в плоскости, как это происходит, если стул стоит на неровном полу. Следовательно, стул на трех ножках более устойчив.

Ответ: стул на трех ножках более устойчив.

VI.3. Предположим, у нас имеется круглый торт. Нам нужно разрезать его на восемь кусков, при этом сделав только три разреза. Вопрос: можно ли это сделать?

Решение. Очевидный ответ: нет, нельзя. Однако, если мы подумаем немного нестандартным путём, а именно разрежем торт не только вертикально, как мы привыкли, но и горизонтально, то получится то, что нужно. Итак, мы совершаем два разреза – крест-накрест. Получается четыре куска. Затем режем торт горизонтально посередине. В таком случае каждый кусок из уже имеющихся четырех станет вдвое ниже (или тоньше). Вот такая нехитрая технология.

VI.4. Фермер увеличил в 3 раза высоту, ширину и длину короба, который представляет собой прямоугольный параллелепипед. Во сколько раз увеличится объем короба?

Решение. Очевидный ответ: в 3 раза. Но это не так. В самом деле, пусть измерения параллелепипеда (высота, ширина, длина) равны a, b, c. Тогда его объем $V = abc$. Увеличив измерения в 3 раза, мы получим, что новый объем $V_1 = 3a \cdot 3b \cdot 3c = 27abc = 27V$.

Ответ. в 27 раз.

VI.5. Размеры куска мыла, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, уменьшились при использовании за 7 дней в 2 раза. На сколько дней хватит оставшегося куска мыла, если им пользоваться с такой же интенсивностью?

Решение. Очевидный ответ: хватит ещё на 7 дней. Но это не так. В самом деле, пусть измерения параллелепипеда (высота, ширина, длина) равны a, b, c. Тогда его объём $V = abc$. После 7 дней измерения уменьшились в 2 раза. Значит, новый объем $V_1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{8}abc$. Видим, что объем уменьшился в 8 раз, т. е осталось 12,5 % мыла (100 : 8 = 12,5), а каждый раз расходовалось (100% – 12,5 %) : 7 = 12,5%. Значит, мыла осталось ровно на 1 день.

Ответ. на 1 день.

При решении подобных задач нужно пользоваться теоремой «Если линейные размеры тела увеличили (уменьшили) в k раз, то объем тела увеличится (уменьшится) в k^3 раз». Вот примеры задач, при решении которых используется данная теорема.

VI.6. Мальчик из 100 грамм пластилина вылепил куб. Сколько граммов пластилина ему потребуется, чтобы вылепить куб, ребро которого в 4 раза больше?

Решение. Очевидный ответ: в 4 раза больше, т.е. 400 граммов – неверный. На самом деле, видим, что линейные размеры куба увеличились в 4 раза. Значит, его объем, а следовательно, и масса увеличатся в 4^3раз, то есть в 64 раза. Следовательно, потребуется 100 г 64 = 6 400 г.

Ответ. 6 400 грамм.

VI.7. В Лилипутии все вещи в 12 раз короче, чем на родине Гулливера. Определите, сколько спичечных коробков Лилипутов поместится в спичечном коробоке Гулливера?

Решение. Очевидный ответ: 12 коробков – неверный. Ллинейные размеры вещей на родине Гулливера в 12 раз больше линейных размеров вещей в Лилипутии. Значит, объем спичечного коробка Гулливера в 12^3 раз больше объема спичечного коробка Лилипутов, то есть в 1 728 раз. Следовательно, в спичечный коробок Гулливера поместятся $12 \times 12 \times 12 = 1728$ коробков Лилипутов.

Ответ. 1 728 коробков.

VI.8. Представьте себе Земной шар, и то, что мы мысленно разрезаем его на две половины. Затем одну из половин разрезаем пополам, полученную четвертую часть земного шара опять режем пополам и так далее. Сколько потребуется разрезов (десятки, сотни, тысячи, миллионы), чтобы получить частичку Земного шара массой: а) 6 кг; б) 6 г?

Примечание. Масса земного шара приблизительно равна $6\ 10^{24}$ кг.

Решение. Очевидные» ответы – больше миллиона разрезов или больше тысячи разрезов – неверные. В самом деле, пусть x – количество разрезов.

а) Тогда имеем уравнение: $6\ 10^{24} \cdot (0,5)^x = 6$ или $2^x = 10^{24}$.

Откуда находим $x = \log_2(10^{24}) = 24 \cdot \log_2 (10) \approx 24 \cdot 3,32 \approx 80$.

Итак, потребуется всего лишь 80 разрезов.

б) Легко теперь установить, что для того, чтобы получить частичку Земного шара массой 6 граммов, достаточно тоже не миллион разрезов. Чтобы узнать число разрезов в этом случае, достаточно решить уравнение:

$6\ 10^{24}\ (0,5)^x = 6 \cdot 10^{-3}$ или $2^x = 10^{27}$.

Откуда находим $x = \log_2(10^{27}) = 27 \cdot \log_2 10 \approx 27 \cdot 3,32 \approx 90$, то есть потребуется только 90 разрезов.

Ответ. а) 80 разрезов; б) 90 разрезов.

VI.9. Земной шар стянули обручем по экватору. Потом длину обруча увеличили на 10 м. При этом между поверхностью Земного шара и обручем образовался небольшой зазор. Сможет ли пролезть под этим обручем блоха? Мышь? Человек?

Примечание. Длина земного экватора приблизительно равна 40 000 км.

Это пример ещё одной задачи, в которой напрашивается очевидный ответ, что зазор будет несколько миллиметров, а то и ещё меньше. Действительно длина экватора 40 000 000 метров (сорок миллионов метров!), а увеличили длину обруча всего лишь на 10 метров. Но приведенные ниже математические расчеты доказывают, что это не так. При этом мы покажем, что в данном случае величина зазора не зависит от радиуса шара. Будь то яблоко, будь то мяч, будь то шар любого радиуса.

Решение. Пусть R_0 – первоначальный радиус обруча (радиус Земного шара), а L – длина окружности обруча (длина экватора Земли). Тогда из формулы $L = 2\pi R$ получим $R = \frac{L}{2\pi}$. А новый радиус $R_1 = \frac{L+10}{2\pi} = \frac{L}{2\pi} + \frac{10}{2\pi} = R_0 + \frac{10}{2\pi}$. Значит, величина зазора равна $\frac{10}{2\pi} \approx 1{,}6$ м и не зависит от радиуса шара. Через образовавшийся зазор вполне может пройти человек небольшого роста.

VI.10. Куб с ребром 1 метр разрезали на кубики с ребром 1 миллиметр каждый. Полученные кубики уложили вдоль прямой в сплошной ряд. Какой длины получился ряд? Выберите ответ: а) не больше 100 м; б) не больше 1000 м; в) не больше 10 км, г) не больше 1 000 км.

Решение. Очевидный ответ: не больше 100 м – неверный. В самом деле, 1 м = 1 000 мм, 1 м^3 = 1 000 000 000 мм^3, следовательно, куб с ребром 1 метр можно разрезать на 1 000 000 000 кубиков с ребром 1 мм. Если эти кубики уложить в сплошной ряд, то длина ряда будет равна 1 000 000 000 мм = 1 000 км. Так что кубиков достаточно для того, чтобы уложить их в сплошной ряд, скажем, от Москвы до Брянска и обратно!

Ответ. г).

VI.11. Как вы думаете, какой высоты получился бы столб, если бы поставить один на другой все сантиметровые кубики, заключающиеся в кубическом метре? Выше, чем Останкинская башня, или ниже?

Решение. Очевидный ответ: нет, ниже. Но это не так. В кубическом метре 100 × 100 × 100 = 1 000 000 (см^3), то есть миллион кубических сантиметров. Поставленные один на другой, они образовали бы столб высотой 1 000 000 см = 10 000 м = 10 км. Его длина намного выше Останкинской башни!

Ответ. 10 километров.

VI.12. Существует ли треугольная пирамида, объем которой равен 1 мм^3, а все ребра больше 1 км?

Решение. Очевидный ответ: нет. Но это не так. В самом деле, пусть в основании правильной пирамиды лежит равносторонний треугольник, сторона которого больше 10 км. В этом случае боковые ребра пирамиды будут больше 5 км. Это следует из того, что длина высоты h треугольника больше 8,5 км, а каждое боковое ребро больше $\frac{2}{3}h$, которое, в свою очередь, больше 5.5 км. Ясно, что в этом случае площадь треугольника больше $\frac{1}{2}$·10км·8,5км = 42,5 км^2. Будем считать, что она равна 50 км^2. Объем пирамиды вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3}SH$, где S – площадь основания, H – высота пирамиды. Считая, что V = 1мм^3, S = 50 км^2, найдем высоту H. Учитывая, что 50 км^2 = 50 000 000 000 000 мм^2, получим уравнение:

$$1\text{мм}^3 = \frac{1}{3}\cdot 50\,000\,000\,000\,000\ \text{мм}^2 \cdot H.$$

Откуда находим $H = 6\cdot 10^{-14}$ мм.

Итак, видим, что пирамида, все ребра которой больше 1 км, а объем равен 1 мм^3, существует. Только у неё очень маленькая высота, проведенная к основанию.

Ответ. да, существует.

VII. Стохастические задачи. Комбинаторные задачи. В комбинаторных задачах очень важно правильно интерпретировать условия задачи, чтобы не попасть в ловушки очевидных, но неправильных ответов. Важно понимать, что в комбинаторике нет универсальных формул и алгоритмов для решения всех задач. Каждая задача является уникальной, и требует индивидуального подхода.

VII.1. В вазе 6 белых, 9 красных и 5 жёлтых цветов. Сколькими различными способами можно взять из вазы три цветка, чтобы один был белым, второй – красным, третий – жёлтым.

Решение. Иногда рассуждают так. У нас наименьшее число цветов – жёлтые (их 5), значит и способов 5. Поэтому появляется очевидный ответ: 5 способов. Это неверно. В силу комбинаторного правила произведения таких способов будет $6\times9\times5 = 270$.

Ответ. 270 способов.

VII.2. Упростите выражение: а) $\frac{8!}{4!}$; б) $\frac{10!}{5!\times2!}$.

Примечание. В комбинаторике есть функция, которую называют факториал. Обозначается $n!$. По определению $n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$, при $n \geq 2$, $0! = 1$, $1! = 1$. Например, $5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$.

Решение. Очевидные ответы – а) 2 или 2!, б) 1 – неверные. Действительно, пользуясь определением факториала, получим:

а) $\frac{8!}{4!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4} = 5\times6\times7\times8 = 1680.$

б) $\frac{10!}{5!\times2!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4\times5\times1\times2} = 3\times7\times8\times9\times10 = 15120.$

Ответ: а) 1680; б) 15120.

VII.3. Шесть друзей собрались попить чай. После того, как они расселись, одному из них не понравился способ рассадки. Тогда они решили каждую минуту менять способ рассадки. Сколько времени они будут пить чай? Выберите ответ: а) не больше 30 минут; б) не больше 1 часа; в) не больше 3 часов, г) не больше 12 часов. А если друзей будет 9? 10?

Решение. Очевидные ответы – а) или б) – неверные. Действительно, друзья будут пить чай столько минут, сколько существует перестановок без повторения из 6 элементов. Таких перестановок 6!. Следовательно, друзья будут пить чай $6! = 1\times2\times3\times4\times5\times6 = 720$ (минут). 720 минут = 12 часов – столько времени друзья будут пить чай, не прерываясь ни на минуту.

Если же друзей будет 9, то они будут пить чай 9! минут. 9! = 362880. 362880 минут = 252 дня = 8,4 месяца.

Если же друзей будет 10, то они будут пить чай 8,4 месяца $\times$ 10 = 84 месяца = 7 лет.

Ответ. 12 часов; 8,4 месяца; 7 лет.

Данная задача наглядно демонстрирует, как быстро растет факториал.

VIII. Стохастические задачи. Задачи теории вероятностей. Теория вероятностей - это раздел математики, изучающий случайные явления и возможности их предсказания. Однако, в ситуациях, когда речь идет о реальном мире с его многообразными свойствами, понятия вероятности часто оказываются неожиданными и не самыми интуитивными. Поэтому даже в задачах, где решение кажется очевидным, на практике это может быть абсолютно неправильным.

Кроме перечисленных примеров, есть множество других ситуаций, когда очевидные ответы могут оказаться неправильными в задачах теории вероятности. Это связано с тем, что наша интуиция может казаться нам правильной лишь на поверхности, но на самом деле мир часто оказывается более сложным и запутанным. Поэтому при работе с теорией вероятностей лучше следовать не интуиции, а строгим математическим правилам и формулам.

VIII.1. Бабушка рассуждает: «Я одинаково люблю двух своих внуков. Живу возле станции метро. Чтобы приехать в гости к первому внуку, я должна сесть в поезд, подходящий к платформе со стороны центра города. Чтобы приехать в гости к другому внуку, я должна сесть в поезд, идущий в центр. Каждый день я прихожу на станцию случайно (в разное время с 13.00 до 14.00) и сажусь на первый попавшийся поезд, который идет либо из центра города, либо в центр города. По каждому из направлений поезда ходят с одинаковым интервалом 3 минуты. Значит, в течение месяца я с одинаковой вероятностью побываю у каждого внука». Правильно рассуждает бабушка? Или у одного из них она побывает чаще, чем у другого?

Решение. Так как поезда ходят с одинаковым интервалом, а бабушка приходит на станцию случайно, то очевидный ответ: с вероятностью 0,5 бабушка будет у каждого внука, т.е. ни у кого из них она не будет чаще, чем у другого. Но это не так. Всё дело в расписании движения поездов. Так, например, если поезда из центра приходят в 1 час 3 мин., 1 час 6 мин., . . . , а поезда, идущие в центр, приходят в 1 час 4 мин., 1 час 7 мин., . . . (см. таблицу 1), то бабушка, случайно будет приходить в бо́льший временной промежуток (от 4 мин до 6 мин, от 7 мин до 9 мин, …) между отправлением поездов, и, конечно, будет чаще бывать у первого внука.

Таблица 1

Из центра (к первому внуку)	1ч 3мин	1ч 6мин	1ч 9мин	1ч 12мин	…
В центр (ко второму внуку)	1ч 4мин	1ч 7мин	1ч 10мин	1ч 13мин	…

VIII.2. Дан равносторонний треугольник. На его углах стоят по одному муравью. В какой-то момент муравьи начинают идти в другой угол вдоль стороны треугольника. В какой именно – определяется случайно. Какова вероятность того, что ни один муравей не столкнётся с другим муравьём?

Решение: Может показаться, что вероятность равна 0,33. Но это не так. Есть два варианта необходимого движения муравьёв: по часовой стрелке и против. Сконцентрируемся на одном муравье. После того, как он случайным образом выбрал направление, ему нужно, чтобы и остальные муравьи двигались в эту же сторону. Вероятность того, что второй муравей пойдёт в его направлении – 0,5. Аналогичная вероятность и у третьего муравья. Это значит, что вероятность того, что муравьи не столкнутся, равна $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

VIII.3. Перед вами стоят три одинаковых закрытых шкатулки, в одной из них лежит 100 000 рублей, а две других – пустые. Можно выбрать любую шкатулку, но сразу открывать нельзя. Затем ведущий игры берёт одну из оставшихся шкатулок, открывает и показывает, что она пустая. Теперь у вас есть выбор: оставить себе ту шкатулку, которую вы выбрали с самого начала, или поменять её на оставшуюся неоткрытую. Как лучше поступить?

Решение. Большинство рассуждают так. Можно оставить себе ту шкатулку, которая была выбрана с самого начала, потому что остались две шкатулки, а, значит, независимо от того, будем мы менять свой выбор или нет, шансы выиграть 100 000 рублей у нас 50:50. И это вполне себе логичные рассуждения, с которыми, казалось, сложно не согласиться. Но на самом деле они неверные. В первый раз, когда ещё все шкатулки закрыты, выбрать правильную (ту, в которой лежит 100 000 рублей) можно с вероятностью 1/3, а неправильную – с вероятностью 2/3. После того, как одну из неправильных шкатулок открывают, вероятность того, что выбранная ранее шкатулка правильная – по-прежнему 1/3, а вероятность того, что другая неоткрытая шкатулка правильная – 2/3, так как теперь только две шкатулки. Поэтому выбранную шкатулку следует поменять на оставшуюся неоткрытую.

Рассмотрим ещё одно рассуждение. Сформулируем задачу другими словами. Пусть ведущий, будучи порядочным человеком, так сразу и говорит, что сначала игроку надо выбрать одну из трёх шкатулок, а потом выбрать одно из двух действий: 1) открыть выбранную шкатулку или 2) открыть две другие. Ясно, что формулировка условия задачи не изменилась, но она стала более откровенной и честной. И в этом ключ к решению и понимаю. Теперь очевидно, что выгоднее выбрать второй вариант, так как вероятность получения 100 000 рублей в два раза выше.

Ответ: поменять выбранную шкатулку на оставшуюся неоткрытую.

Рассмотренная задача носит название «Парадокс Монти Холла». За всё время существования шоу Монти Холла люди, менявшие своё решение, в самом деле выигрывали почти в два раза чаще. Из 30 игроков, поменявших своё изначальное решение выиграло 18 человек – это 60%. А из 30 человек, которые не меняли своего изначального решения выиграло только 11 человек – 36% [5]. Парадокс Монти Холла используют в разных областях, связанных с выбором и неопределенностью. Например, в ставках на спорт.

VIII.4. Одна дама заявила, что у неё двое детей и по крайней мере один из них мальчик. Какова вероятность того, что второй ребенок этой дамы тоже мальчик?

Решение. Очевидный ответ: вероятность равна $\frac{1}{2}$. Но это не так, потому что существуют три равновероятных возможности – ММ (два мальчика), МД (старший ребенок мальчик), ДМ (старший ребенок девочка). Видим, что ММ – только одна из них, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$. Вероятность $\frac{1}{2}$ может быть в том случае, если бы дама заявила, что мальчиком является старший из её детей. В этом случае равновероятных возможностей только две – ММ и МД. Поэтому вероятность того, что другой ребенок мальчик равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

IX. Стохастические задачи. Задачи математической статистики. Математическая статистика – это важная область математики, которая используется для анализа данных и выявления зависимостей между переменными. Одним из ключевых принципов математической статистики является использование статистических методов для получения точной информации о данных. Важную роль в этом процессе играют не только правильные ответы, но и очевидные, но неправильные ответы. Такие ответы могут дать ценную информацию о данных и помочь выявить ошибки в статистическом анализе.

Кроме того, очевидные, но неправильные ответы могут помочь выявить ошибки в анализе данных, что может привести к их исправлению. Например, при анализе статистических данных о средних зарплатах в разных регионах страны очевидно, что неправильный ответ (например, средняя зарплата во всех регионах одинакова) может указывать на ошибки в сборе данных или недостаточную по объему выборку.

Очевидные, но неправильные ответы могут также привести к открытию новых знаний в математической статистике. Иногда неправильный ответ может побудить исследователей к поиску инновационных методов статистического анализа, пересмотру методик подсчета числовых характеристик.

В математической статистике есть такие числовые характеристики выборки как среднее арифметическое, медиана, мода. Среднее арифметическое определяется как число, равное сумме всех значений выборки, деленной на их количество: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Медиана (*Me*) – значение середины вариационного (упорядоченного) ряда. При этом половина значений выборки больше медианы, а другая половина значений выборки меньше медианы. Мода (*Mo*) – это значение выборки, которое встречается наиболее часто [6]. Например, для выборки 2, 4, 4, 6, 1, 1, 4, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 1, 1, 4, 2 эти характеристики будут такими: Среднее равно $\bar{x}$ = 3, *Me* = 3, *Mo* = 4, так как упорядоченный ряд имеет вид: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6. Теперь рассмотрим задачу

IX.1. Известно, что в частной строительной компании средняя зарплата 69 тыс. рублей. Для сравнения средняя зарплата по городу – 40 тыс. рублей. Есть ли смысл пытаться устроиться на работу в эту компанию?

Решение. Очевидный ответ: да, конечно. Однако не всё здесь так очевидно. Надо еще знать информацию о медианной зарплате и модальной зарплате в этой компании. А потом принимать решение. И вот почему.

Допустим, что в компании работают 10 человек: президент (его заплата 300 тыс. рублей), заместитель президента (его зарплата 150 тыс. рублей) и 8 сотрудников (зарплата каждого 30 тыс. рублей). Имеем статистический упорядоченный ряд: 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 150, 300. Видим, что средняя зарплата равна 69 тыс. рублям. Прилично? Можно идти туда проситься на работу? Нет конечно. Вот обоснование:

1. Медиана выборки *Me* = 30. Значит, половина сотрудников получают зарплату не выше 30 тыс. рублей.

2. Мода выборки *Mo* = 30. Значит, зарплата 30 тыс. рублей встречается наиболее часто.

Поэтому, устроившись в эту компанию, зарплату больше 30 тыс. рублей получать проблематично.

Ответ: нет.

IX.2. Найдите медиану данной выборочной совокупности: 7, 1, 3, 1, 7, 7, 8, 9, 2, 7, 8, 1, 1, 3, 1.

Решение. Очевидный ответ: 9, так как значение середины ряда равно 9. Однако ответ неверный. Медиана (*Me*) – это значение середины вариационного (упорядоченного) ряда. Записав упорядоченный ряд 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, видим, что *Me* = 3.

Ответ: 3.

IX.3. Администрацией города было решено провести опрос общественного мнения, на что надо в первую очередь направить городские средства – на строительство дешевого жилья или на развитие транспорта. Для этого по телефонному справочнику стационарных телефонов города случайным порядком была составлена выборка и вошедшие в неё были опрошены по телефону. Оказалось, что транспорт волнует горожан больше, чем дешевое жилье. Убедительны ли результаты этого исследования?

Решение. Очевидный ответ: да, так как опрос проводился случайным образом среди жителей города. Но это неверный ответ. В самом деле, хотя фамилии и выбирались случайным порядком, но считать эту выборку репрезентативной никак не приходится. В нее не могли попасть люди, не имеющие дома телефон, проживающие в общежитиях и т.п. Их мнение заведомо не учитывалось, а возможно, это было мнение очень большой части населения.

Ответ: нет, не убедительны.

IX.4. На соревнованиях по фигурному катанию две фигуристки получили (по шестибалльной шкале) оценки судей, представленные в таблице 2.

Таблица 2

Номер фигуристки	Номер судьи								
фигуристки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4,8	5,6	4,9	5,2	4,7	4,9	4,9	4,8	4,7
2	5,1	4,2	5,0	4,9	5,0	5,1	5,0	5,1	5,0

*Р*аспределение по частотам оценок *X* и *У*, выставленных соответственно первой и второй фигуристкам, показаны в таблицах 3 и 4. Какая фигуристка выступила лучше?

Таблица 3

X	4,7	4,8	4,9	5,2	5,6
n_i	2	2	3	1	1

Таблица 4

Y	4,2	4,9	5,0	5,1
n_i	1	1	4	3

Решение. Очевидный ответ: вторая выступила лучше, потому что у второй фигуристки почти все оценки (7 оценок) не меньше 5,0, а у первой почти все оценки (7 оценок) меньше 5,0. Этот ответ неверный. Лучше выступила первая фигуристка. В самом деле, среднее значение оценок каждой из фигуристок: $\bar{x} \approx 4{,}94$; $\bar{y} \approx 4{,}93$. Видим, что $\bar{x} > \bar{y}$, то есть среднее значение оценок первой фигуристки больше среднего значения оценок второй. Значит, она выступила лучше.

Ответ: лучше выступила первая фигуристка.

В данном случае очевидный ответ вынуждает нас задуматься, почему так произошло. Явно проигрыш второй фигуристки выглядит несправедливым. Этот результат получен, скорее всего, из-за необъективности 2-го судьи, завысившего по сравнению с остальными судьями оценку первой фигуристке и занизившего оценку второй фигуристке.

Для большей объективности сравнения результатов в последние годы на международных соревнованиях из совокупности баллов каждого фигуриста отбрасывают наибольшее и наименьшее значения. В нашем случае после отбрасывания наибольшего и наименьшего значений из совокупности баллов каждой фигуристки имеем: $\bar{x}_1 \approx 4{,}89$; $\bar{y}_1 \approx 5{,}01$. Видим, что $\bar{x}_1 < \bar{y}_1$. Значит, в этом случае справедливость восторжествовала: вторая фигуристка выступала лучше первой.

IX.5. Посчитали коэффициент корреляции Браве-Пирсона *r* для распределений, представленных в таблице 5. Он оказался равным 0,73. Может ли такое быть?

Решение. Очевидный ответ: да, такое может быть, так как коэффициент корреляции удовлетворяет условию: $-1 \leq r \leq +1$. Однако ответ неверный. Если внимательно проанализировать таблицу, то можно заметить, что с увеличением значений одной случайной величины (Y) уменьшается значения другой (X). Поэтому в данном случае коэффициент корреляции не может быть положительным. Он должен быть отрицательным.

Ответ: нет, такое не может быть.

Таблица 5

X	7.3	6.9	6.1	4.4	2.7	0	-2.5	-3.1
Y	1,8	3,9	6,3	8,2	9,9	13	13,9	16,3

X. Логические задачи. Логические задачи часто являются отличным способом тренировки мозга и развития логического мышления. Однако иногда мы склонны дать очевидный, но неправильный ответ при решении этих задач.

Помимо описанных ниже примеров, существует множество других типов логических задач, в которых возможна ошибка при использовании очевидных ответов.

X.1. Представьте, что вы участвуете в марафонском забеге. Наконец, вам удалось обогнать спортсмена, бегущего вторым. На каком вы сейчас месте?

Решение. Обычно сразу говорят, что на первом. Но если вы обогнали второго, значит, заняли его место, и, следовательно, бежите вторым, а не первым.

Ответ: на втором.

X.2. Корабль стоит на якоре, с кормы спущена веревочная лестница (расстояние между ступеньками – 20 см). Самая нижняя ступенька касается поверхности воды. Во время прилива каждый час вода поднимается на 10 см. Сколько ступенек лестницы останется под водой через 6 часов?

Решение. Очевидный ответ: три – неверный. Обычно начинают считать, что через 6 часов вода поднимется на $10 \cdot 6 = 60$ (сантиметров) и делают вывод, что под водой окажутся $60 : 20 = 3$ (ступеньки). Однако вместе с приливом поднимается и корабль, а значит, и лестница, привязанная к его борту. Так что, и через 6 часов над поверхностью воды останется столько же ступенек, сколько и было.

Ответ: нисколько.

Х.3. На диване лежит ровно 100 газет. За каждые 10 секунд можно отсчитать 10 газет. Сколько нужно будет секунд, чтобы отсчитать 75 газет максимально быстро?

Решение. Очевидный ответ: 75 секунд – неверный. Нужно всего 25 секунд. Изначально мы знаем, что газет всего 100, поэтому, убрав 25 газет за 25 секунд, у нас останется 75 газет.

Ответ: Нужно всего 25 секунд.

Х.4. Дедушка пилит бревна. Один распил бревна он делает за одну минуту. Сколько ему понадобится времени, чтобы распилить бревно на 10 частей?

Решение. Очевидный ответ: 10 минут – неверный. Чтобы распилить бревно на 10 частей, нужно сделать 9 распилов. Поэтому потребуется 9 минут.

Ответ: 9 минут.

Х.5. В подъезде 6-этажного дома есть лифт. На первом этаже живет всего 1 человек, от этажа к этажу количество жителей увеличивается вдвое. На каком этаже в этом подъезде чаще всего нажимается кнопка вызова лифта?

Решение. Очевидный ответ: на последнем, так как там больше всего проживающих – неверный. Ясно, что чаще всего нажимается кнопка вызова лифта на первом этаже, независимо от распределения жителей по этажам. Через этот этаж проходят все жители подъезда.

Ответ: на первом.

Х.6. Павел утверждает, что подъем по лестнице на 9-й в 3 раза длиннее, чем подъем на 3-й этаж. Правильно ли он рассуждает?

Решение. Очевидный ответ: да, правильно – неверный. Действительно, до 9-го этажа надо пройти 16 лестничных маршей, а до третьего только 4. Значит, подъем по лестнице на 9-й этаж в 4 раза длиннее, чем подъем на 3-й этаж. Так, что Павел рассуждает неправильно.

Ответ: нет, неправильно.

Х.7. В шестиэтажном доме с этажа на этаж идут лестницы одинаковой длины. Во сколько раз подъём с первого этажа на шестой длиннее, чем подъём с первого этажа на третий?

Решение: Очевидный ответ: в 2 раза **–** неверный. Действительно, с первого этажа на 3-й идут 2 лестницы, а на 6-й идут 5 лестниц. Следовательно, подъём с первого этажа на шестой длиннее, чем подъём с первого этажа на третий $5 : 2 = 2.5$ раза.

Ответ: в 2.5 раза.

Х.8. Некто считает, что лестница на 4-й этаж в 2 раза длиннее, чем лестница на второй этаж. Прав ли он?

Решение: Очевидный ответ: да, прав – неверный. Действительно, для того чтобы подняться на 2-й этаж, надо пройти один этаж, а для того чтобы подняться на четвёртый – надо пройти три этажа. Значит, лестница на четвёртый этаж дома в 3 раза длиннее, чем лестница на второй этаж этого же дома.

Ответ: нет, не прав.

Х.9. Виталик и Оля живут в одном доме: Виталик на шестом этаже, а Оля на втором. Если Оля, поднимаясь к себе, проходит 20 ступенек, то, сколько ступенек проходит Виталик, поднимаясь на свой этаж?

Решение. Очевидный ответ: 60 ступенек – неверный. В самом деле, Оля, поднимаясь на второй этаж, проходит один лестничный пролет, а Виталику, поднимаясь на шестой этаж, надо преодолеть 5 таких пролетов, каждый из которых состоит из 20 ступенек. Следовательно, Виталик проходит ступенек в 5 раз больше, то есть всего 100 ступенек.

Ответ. Виталик проходит 100 ступенек.

Х.10. Лифт поднимается с первого этажа на третий за 9 секунд. Павел утверждает, что на седьмой этаж лифт поднимется за 21 секунду. Рассуждал он так. Раз с первого этажа на третий лифт поднимается за 9 секунд, то на подъем с этажа на этаж затрачивается 9 : 3 = 3 (с). Значит, на седьмой этаж лифт поднимется за 3 · 7 = 21 (с). Правильно ли он рассуждает?

Решение. Очевидный ответ: да, правильно – неверный. В самом деле, поднимаясь на 3-й этаж, лифт проходит 2 этажа, а поднимаясь на 7-й этаж – 6 этажей. То еть в 3 раза больше. Значит, и время подъёма на 7-й этаж будет в 3 раза больше, чем на 3-й, т.е. 27 секунд.

Ответ. нет, неправильно.

Х.11. Первый автомобиль едет из Москвы в Брянск, Второй – из Брянска в Москву. Из городов они выехали одновременно. Первые два часа движения автомобили ехали с одинаковой скоростью (80 км/ч), но потом Второй автомобиль увеличил скорость до 100 км/ч. Какой из автомобилей будет ближе к Москве в момент их встречи?

Решение. Очевидный ответ: второй, т.к. он быстрее приближается к Москве. Но это не так. В момент встречи автомобили будут на одинаковом расстоянии от Москвы.

Ответ. В момент встречи автомобили будут на одинаковом расстоянии от Москвы.

Х.12. Является ли истинным высказывание: а) «Если 2·2=5, то 13 > 15», б) «Если 2·2=5, то 13 < 15»,

Решение. Очевидный ответ: нет, не являются истинными, т.к. условие 2·2=5 – ложное высказывание. Но это не так. Правильный ответ: оба высказывания являются истинными. Это следует из того, что в математической логике импликация считается истинным высказыванием, если её посылка (условие) – ложное высказывание. При этом неважно, какую истинность имеет заключение. В нашем случае условие 2·2=5 – ложное высказывание. Поэтому в случаях а) и б) высказывания являются истинными.

Ответ. а) да; б) да.

Х.13. Сформулируйте отрицание высказывания: а) «2·2=5 и 13 < 15», б) «2·2=5 или 13 < 15».

Решение. а) Очевидный ответ: «2·2 не равно 5 и 13 >15». Однако это не так, потому что первоначальное высказывание ложное, а его отрицание должно быть истинным, а оно тоже ложное. Значит, отрицание высказывания сформулировано неверно. Верный ответ: а) «2·2 не равно 5 или 13 >15», т.к. в математической логике отрицание конъюнкции равно дизъюнкции отрицаний.

б) Очевидный ответ: «2·2 не равно 5 или 13 >15». Однако это не так, потому что первоначальное высказывание истинное, а его отрицание должно быть ложным, а оно тоже истинное. Значит, отрицание высказывания сформулировано неверно. Верный ответ: б) «2·2 не равно 5 и 13 >15», т.к. в математической логике отрицание дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний.

Ответ. а) «2·2 не равно 5 или 13 >15»; б) «2·2 не равно 5 и 13 >15».

Х.14. Сформулируйте отрицание высказывания: «Все треугольашики равнобедренные»; б) «Существуют натуральные больше 1000».

Решение. а) Очевидный ответ: «Все треугольники неравнобедренные» – неверный, потому что это высказывание ложное, как и исходное, а должно быть истинным. В математической логике отрицание высказывания с квантором (существования или общности) может быть построено двумя способами: 1) перед данным высказыванием ставят слова: «неверно, что»; 2) квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора, заменяется его отрицанием. Так, если *A*: «Существуют четные числа кратные 5» – высказывание, полученное из предиката *A*(*x*): «Четное число *x* кратно 5», то его отрицание $\overline{A}$ можно сформулировать так: «Неверно, что существуют четные числа кратные 5» или «Все четные числа не кратны 5». Поэтому в нашем случае отрицанием искомого выказывания будут два высказывания: «Неверно, что все треугольники равнобедренные» или «Существуют треугольники, которые не являются равнобедренными».

б) Очевидный ответ: «Существуют натуральные числа меньше 1000» – неверный, потому что это высказывание истинное, как и исходное, а должно быть ложным. Воспользовавшись правилом построения отрицаний высказываний с квантором, запишем отрицания данного высказывания: «Неверно, что существуют натуральные больше 1000» или «Все натуральные числа меньше 1000».

Ответ. а) «Неверно, что все треугольники равнобедренные» или «Существуют треугольники, которые не являются равнобедренными»; б) «Неверно, что существуют натуральные больше 1000» или «Все натуральные числа меньше 1000».

Х.15. Некто задумал число от 1 до 1000. Сколько вопросов ему надо задать, чтобы, получая на них только ответы «да» и «нет», отгадать это число? Выберите ответ: а) не более 10 вопросов; б) не более 100 вопросов; в) не более 500 вопросов; г) более 500 вопросов.

Решение. Очевидный ответ: более 500 вопросов – неверный. В самом деле, если спросить, находится ли задуманное число между 1 и 500, то зона поиска сразу станет вдвое меньше. И потом надо новыми вопросами так же делить новые промежутки пополам. Тогда после первого вопроса остается выбрать только из половины чисел от той тысячи, что была вначале, после второго – из четверти, а девятый вопрос выбирает уже только из $1/9^2 = 1/512$ части от тысячи, то есть всего из двух последних чисел. Десятый же вопрос поможет угадать задуманное число.

Рассмотрим пример. Пусть задумано число 667. Вопросы будем задавать так:
1-й вопрос: Число больше 500? Ответ: Да.
2-й вопрос: Число больше 750? Ответ: Нет.
3-й вопрос: Число больше 625? Ответ: Да.
4-й вопрос: Число больше 678? Ответ: Нет.
5-й вопрос: Число больше 637? Ответ: Да.
6-й вопрос: Число больше 653? Ответ: Да.
7-й вопрос: Число больше 661? Ответ: Да.
8-й вопрос: Число больше 665? Ответ: Да.
9-й вопрос: Число больше 667? Ответ: Нет.
10-й вопрос: Число больше 666? Ответ: Да.
Понятно теперь, какое задумано число?
Конечно же, 667.
Ответ: не более 10 вопросов.

А вот еще одна задача. Её решение аналогично решению предыдущей задачи.

Х.16. Попугай прожил меньше 100 лет и умеет отвечать на вопросы, говоря слова «да» или «нет». Сколько вопросов ему надо задать, чтобы узнать его возраст? Выберите ответ: а) не более 7 вопросов; б) не более 10 вопросов; в) не более 25 вопросов; г) более 50 вопросов.

Решение. *Решение*. Очевидный ответ: более 50 вопросов – неверный. На самом деле можно обойтись гораздо меньшим числом вопросов. Спросим его так: «Тебе больше 50 лет?» Если он ответит «да», то его возраст от 51 до 99 лет; если же он ответит «нет», то ему от 1 года до 50 лет. Количество вариантов его возраста после первого же вопроса сокращается вдвое. Следующий подобный вопрос: «Тебе больше (можно спросить – меньше) 25 лет?», «Тебе больше (меньше) 75 лет?» (в зависимости от ответа на первый вопрос) сокращает число вариантов в четыре раза и т. д. В итоге попугаю надо задать всего 7 вопросов.

Ответ. 7 вопросов.

X.17. Куртка и перчатки стоят 5 300 рублей. Куртка стоит на 5000 рублей дороже, чем перчатки. Сколько стоят перчатки?

Решение. Очевидный ответ: 300 рублей – неверный. Если бы перчатки действительно стоили 300 рублей, то куртка, которая дороже их на 5000 рублей, стоила бы 5 300 рублей. Это противоречит условию задачи. Приведем правильное решение. Пусть цена перчаток x рублей. Тогда куртка стоит $x +$ 300 рублей. По условию получаем уравнение: $x + (x + 5\ 000) = 5\ 300$, решив которое найдем $x = 150$. Значит, перчатки стоят 150 рублей, а куртка – 5 150 рублей.

Ответ. 150 рублей.

XI. Задачи из теории множеств. Теория множеств является основополагающей теоретической дисциплиной в математике, которая изучает множества, их свойства и отношения между ними. Она имеет широкий спектр приложений и играет важную роль в различных областях науки, включая логику, алгебру, теорию вероятностей, информатику и другие разделы математики.

В теории множеств существуют различные задачи, которые могут иметь неправильные ответы или даже приводить к парадоксам. Это связано с особенностями понятий и операций, которые в ней применяются. Одной из таких задач является парадокс Рассела, появившийся при рассмотрении множества всех множеств, которые не содержат самих себя в качестве подмножества. В более наглядной форме этот парадокс сформулировал сам Рассел. Деревенский парикмахер решил брить всех тех жителей деревни, которые не бреются сами. Спрашивается: должен ли он брить самого себя? Если он будет брить самого себя, значит, он тем самым включает себя в число тех, которые бреются сами, и тогда он не должен брить себя; если же он не будет брить себя, то он уже будет принадлежать к тем, которые сами себя не бреют, и, значит, он должен брить себя. Как же он должен поступить, чтобы выполнить в точности свое решение?

Этот парадокс подчеркивает сложность некоторых понятий в теории множеств и побуждает к поиску более строгой формулировки аксиом.

Бесконечные множества – одна из самых интересных и загадочных тем в математике. Они вызывают много вопросов, дискуссий и споров среди ученых. Однако они также играют важную роль в задачах с неправильными ответами. Интуитивное представление о бесконечных множествах может быть обманчивым и провоцировать неправильные ответы. Это вызывает удивительные реакции у учащихся и требует глубокого анализа и понимания особенностей бесконечных математических структур.

XI.1. Представим себе гостиницу, в которой комнат столько, сколько элементов в множестве натуральных чисел. В настоящий момент все комнаты заняты и в каждой из них живёт по одному туристу. К администратору гостиницы обращается группа из 5 туристов, которые просят их тоже поселить в гостиницу так, чтобы каждый из них жил в комнате один. Может ли администратор гостиницы:

– поселить прибывших туристов,

– проживающих в гостинице туристов не выселять,

– расселить всех туристов (и прежних, и вновь прибывших) по одному в комнате?

Решение. Очевидный ответ: нет. На самом деле можно. Для этого администратор просит проживающих в гостинице туристов переселиться из своей комнаты в комнату, порядковый номер которой на 5 больше, т.е. из комнаты №1 переселиться в комнату №6, из №2 – в №7, из №3 – в №8, из №4 – в №9, из №5 – в №10, из №6 – в №11, из №7 – в №12,… . Тем самым ранее проживающие туристы опять будут жить по одному в комнате, а в освободившиеся 5 комнат он заселит по одному вновь прибывших туристов. Просьба удовлетворена.

Ответ. может.

Подобные проблемы можно решать только в том случае, когда мы имеем дело с бесконечными множествами. Множество натуральных чисел – бесконечное множество.

В теории множеств есть такое понятие как взаимно-однозначное соответствие. Взаимно однозначное соответствие – это соответствие между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества, а каждому элементу второго – один и только один элемент первого множества [6]. Например, если в классе за каждым столом сидит один и только один ученик, то можно в этом случае говорить, что между множеством столов и множеством учеников в классе установлено взаимно-однозначное соответствие. Рис. 1 показано взаимно-однозначное соответствие между множеством точек множества $A = \{a, p, q, s, r\}$ и множеством точек множества $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

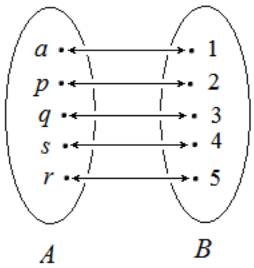


Рисунок 1. Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек множества $A = \{a, p, q, s, r\}$ и множеством точек множества $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Источник: составлено автором)

XI.2. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел N = {1 , 2, 3, 4, 5, 6, ….} и множеством четных натуральных чисел $\mathbf{N}_2$ = {2 , 4, 6, 8, 10, ….}?

Решение. Очевидный ответ: нет. Это следует из того, что $\mathbf{N}_2 \subset \mathrm{N}$ и элементов в нём «вдвое меньше», чем в множестве **N**. Так рассуждать, имея дело с бесконечными множествами, нельзя.

Взаимно-однозначное соответствие между множествами **N** и $\mathbf{N}_2$ показано на рис. 2.

Ответ: да, можно.

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{12} & \mathbf{14} & \ldots \end{array}$$

Рисунок 2. Взаимно-однозначное соответствие между множествами N и N2. (Источник: составлено автором)

XI.3. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между:

а) множеством точек отрезков *MN* (множество *A*) и *PQ* (множество *B*) (рис. 3а);

б) множеством точек квадрата и множеством точек окружности (рис. 3б)

в) множеством точек отрезка и множеством точек прямой (рис. 3в)

в)

Рисунок 3. а. Множества точек отрезков *MN* (множество *A*) и *PQ* (множество *B*); б. Множество точек квадрата и множество точек окружности; в. Множество точек отрезка *MN* и множество точек прямой *a*. (Источник: составлено автором)

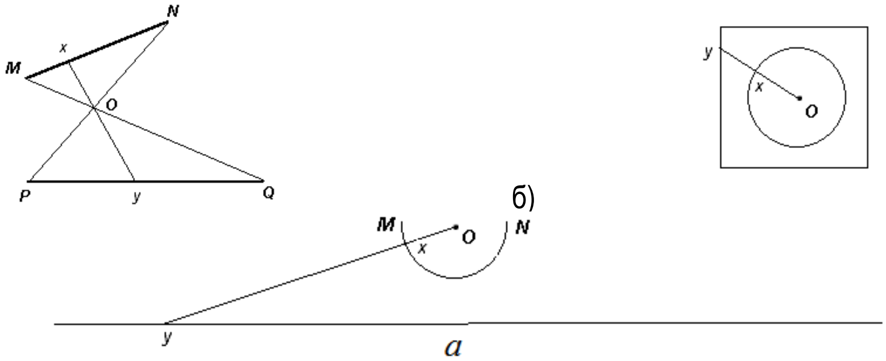
Решение. Очевидный ответ: нет. На самом деле можно.

а) Расположим отрезки так, как показано на рис. 4а. Соединим точки *M* и *Q*, *N* и *P*. Точку пересечения обозначим буквой *O*. Проведем через точки *O* и *x* прямую *Ox* до пересечения с отрезком

PQ в точке *y*. Тем самым мы любой точке $x \in A$ поставим в соответствие одну и только одну точку $y \in B$, т.е. таким образом установим взаимно-однозначное соответствие между множеством *A* и множеством *B*.

б) Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек квадрата и множеством точек окружности показано на рис. 4б. Окружность надо поместить внутрь квадрата.

в) Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек отрезка и множеством точек прямой показано на рис. 4в. Отрезок надо превратить в полуокружность.



а) б) в)

Рисунок 4. а. Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек отрезков *MN* (множество *A*) и *PQ* (множество *B*); б. Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек квадрата и множеством точек окружности; в. Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек отрезка *MN* и множеством точек прямой *a*. (Источник: составлено автором)

Отметим, что в этой задаче удалось построить взаимно-однозначные соответствия лишь потому, что множества точек отрезков, окружности, квадрата, прямой – бесконечные множества.

Заключение

Математика – это наука с множеством свойств, которые делают ее не только важной, но и красивой и увлекательной. Она помогает нам понимать мир, в котором мы живем, и решать сложные проблемы, которые возникают на нашем пути.

При решении математических задач необходимо быть внимательнее и не допускать ошибок, даже если ответ кажется очевидным. Иногда правильным ответом является не то, что кажется на первый взгляд логичным. Поэтому при решении задач всегда необходимо применять соответствующие теоретические положения, алгоритмы и формулы. Кроме того, в логических задачах часто возникают ложные предположения, которые могут привести к неправильным ответам.

Безусловно, правильные ответы – это конечная цель в обучении математике и от них зависит успех учащихся в этой области. Однако, как мы видим, неправильные ответы также играют очень важную роль в этом процессе. Они могут помочь школьникам и студентам лучше понять процесс решения, стимулировать их креативность и помочь приобрести более глубокие знания, умения и навыки.

Не следует расстраиваться, если в процессе решения задач мы сталкиваемся с неправильными ответами. Их следует рассматривать как инструмент для лучшего понимания процесса решения не только теоретических, но и практических задач окружающего мира. Неполные или ошибочные ответы могут приблизить учащихся к реальным ситуациям и пересмотреть неверные решения, что способствует лучшему пониманию математики в целом.

Поистине удивительные и неожиданные ответы получены во всех рассмотренных необычных задачах. Более того, в задачах **I.4**, **I.5**, **I.6**, **I.7**, **I.8**, **II.9**, **II.11**, **II.12**, **III.5**, **III.10**, **V.5**, **V.6**, **V.7**, **VI.5**, **VI.8**, **VI.9**, **VI.10**, **VI.12**, **VII.3**, **VIII.1**, **VIII.3**, **X.15**, **XI.1** ответы кажутся неправдоподобными, в них очень трудно поверить. Однако строгие математические рассуждения и вычисления подтверждают достоверность полученных результатов.

Необычные задачи, удивляющие своими ответами, показывают реальную силу математики, её красоту и универсальность в процессе познания окружающего мира.

Список литературы

1. Зеленский А.С. Использование специально сконструированных ошибочных и нерациональных решений задач для повторения и коррекции знаний учащихся // Математика в школе. 2012. №2. С. 24-33.
2. Знаменитая Шахматная легенда про Царя, Мудреца и пшеничные зёрна. Режим доступа: https://dzen.ru/a/YGh4Ktrnjj8ojkIx.
3. Награда. Режим доступа: https://www.poznovatelno.ru/opit/chisla/154.html.
4. Парадокс Рассела. Главный парадокс теории множеств, оказавший влияние на всю математику. Режим доступа: https://dzen.ru/a/Xz-1Hv7umhwvrlnh.
5. Парадокс трёх шкатулок, который на первый взгляд противоречит здравому смыслу. Режим доступа: https://dzen.ru/a/YiMtnXBOvwOWVkht.
6. Тонких А.П. Математика: учебное пособие для студентов факультетов подготовки учителей начальных классов: в 2 кн. / 2-е изд., испр. Москва: КДУ, 2008. 20 с.
7. Тонких А.П. Сборник компетентностных задач по математике для начальной школы: пособие для учителей начальных классов. Брянск: Курсив, 2009. 84 с.
8. Тонких А.П. Стохастика в начальной школе: Сборник задач. Пособие для учителей начальных классов / М.: ООО «Баласс», 2013. 128 с.
9. Тонких А.П. Теоретические основы решения нестандартных и занимательных задач в курсе математики начальных классов // Начальная школа плюс До и После. 2002. № 5. С. 47-57.
10. Чебакова Г.В. Диагностика типичных ошибок. Режим доступа: https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/diaghnostika-tipichnykh-oshibok-pri-rieshienii-zadach-na-urokakh-matiematiki.

An overview of mathematical problems that surprise with their answers

Alexander P. Tonkikh
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Methods of Primary Education and Pedagogical Management
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky
Bryansk, Russia
a_tonkih@mail.ru
ORCID 0000-0002-2140-8334

Received 04.11.2023
Accepted 17.12.2023
Published 15.01.2024

UDC 51:165.2
DOI 10.25726/u1959-5258-6444-u
EDN DGZUKA
VAK 5.8.7. Methodology and technology of vocational education (pedagogical sciences)
OECD 05.03.HE EDUCATION, SPECIAL

Abstract

Teaching mathematics is a process in which students (schoolchildren or students) learn the abstract and logical laws of mathematics, as well as their application in solving problems. By adding new mathematical facts to their knowledge, they become more confident in their abilities, develop logical and critical thinking, which are necessary not only for studying many other disciplines, but also for learning about the world around them. The article considers examples of problems from various branches of mathematics (arithmetic, algebra, geometry, combinatorics, probability theory, mathematical statistics, mathematical logic, etc.), which at first glance have obvious answers. However, these answers are incorrect and only rigorous mathematical reasoning (or calculations) allow you to get the correct answer to the question posed in the problem. Moreover, the tasks are chosen in such a way that they surprise with their correct answers, which seem incredible, questionable and even contrary to common sense. Only rigorous mathematical reasoning can dispel these doubts. Analyzing mistakes made during solving a mathematical problem helps students better understand where they reasoned incorrectly, how to correct incorrect conclusions, and what needs to be done to avoid such an error in the future. Correcting mistakes will help them better understand the mathematical material and the surrounding reality.

Keywords

mathematics, universality of mathematics, mathematical precision, rigor of mathematics, unusual mathematical problems, obvious answers, the world around us.

References

1. Zelensky A.S. The use of specially designed erroneous and irrational solutions to problems for repetition and correction of students' knowledge // Mathematics at school. 2012. No.2. pp. 24-33.
2. The famous Chess legend about the King, the Sage and wheat grains. Access mode: https://dzen.ru/a/YGh4Ktrnjj8ojkIx .
3. The reward. Access mode: https://www.poznovatelno.ru/opit/chisla/154.html .
4. Russell's Paradox. The main paradox of set theory, which has influenced all mathematics. Access mode: https://dzen.ru/a/Xz-1Hv7umhwvrlnh .
5. The paradox of the three boxes, which at first glance contradicts common sense. Access mode: https://dzen.ru/a/YiMtnXBOvwOWVkht .
6. Tonkikh A.P. Mathematics : a textbook for students of primary school teacher training faculties : in 2 books / 2nd ed., ispr. Moscow: KDU, 2008. 20 p.
7. Tonkikh A.P. Collection of competence tasks in mathematics for primary schools : a manual for primary school teachers. Bryansk: Italics, 2009. 84 p.
8. Tonkikh A. P. Stochastics in elementary school: A collection of problems. Manual for primary school teachers / M.: LLC "Balass", 2013. 128 p.
9. Tonkikh A.P. Theoretical foundations of solving non-standard and entertaining problems in the course of mathematics of primary classes // Elementary school plus Before and After. 2002. No. 5. pp. 47-57.
10. Chebakova G.V. Diagnosis of typical errors. Access mode: https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/diaghnostika-tipichnykh-oshibok-pri-rieshienii-zadach-na-urokakh-matiematiki.