

Модель мониторинга восстановления спортсменов как источника реабилитационного процесса

Юрий Васильевич Забайкин

кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры управление бизнесом и сервисных технологий
Росбиотех

Москва, Россия

89264154444@Yandex.ru

 0000-0000-0000-0000

Поступила в редакцию 02.07.2023

Принята 19.08.2023

Опубликована 15.09.2023

 10.25726/g5732-9817-4823-s

Аннотация

Реабилитация спортсменов после получения травмы ограничивает не только дальнейшее их участие в соревновательной деятельности, но также и снижается общее качество жизни. В связи с этим, процесс восстановления является важнейшей характеристикой и построение восстановительных графиков позволяет определить наиболее перспективные технологии восстановления и меры, способствующие достижению ранее показываемых результатов. Новизна исследования определяется возможностями достижения ранее показываемых результатов с использованием методологии полного восстановления. Вместе с тем, авторы отмечают, что помимо физиологического восстановления существует необходимость в достижении морального и этического компонент. Компонент подобного толка определяется как способность спортсмена к фильтрации поступающей информации и снижению внимания на отвлекающие элементы, которые называются белым шумом и носят не только технический эффект. Авторы показывают, что это позволяет сократить время восстановительного периода и увеличить сроки выступления спортсмена в последующих соревновательных периодах. Практическая значимость исследования определяется динамикой восстановления спортсмена и применением модели фильтрации окружающей информации. Определено, что структура мониторинга является решением системы входа и выхода, что позволяет обеспечить интерпретацию необходимой информации.

Ключевые слова

динамика, спортсмен, восстановление, структура, сигнал.

Введение

Лечебное действие физических упражнений проявляется как четыре основных механизма: тонизирующее воздействие, трофическое действие, формирование компенсации, нормализация функций, среди которых первые два являются ведущими (Murray, 2014). Физические упражнения повышают тонус ЦНС, стимулируют процессы нервной регуляции сердечной деятельности, обеспечивают образование в коре головного мозга физиологической доминанты возбуждения, под влиянием которой по законам отрицательной индукции возникает затухание другого патологического очага возбуждения. Дозированная физическая нагрузка может увеличить количество крови, протекающей через коронарные сосуды в 8-10 раз. Все это интенсифицирует трофические процессы в сердечной мышце, укрепляет миокард, усиливает его сократительную способность, создает условия для восстановительных и регенеративных процессов в сердце, предупреждает или уменьшает в нем развитие кардиосклеротических изменений и дистрофии (Elovic, 2004).

Адекватная физическая тренировка активно влияет на развитие коллатерального кровообращения при нарушениях коронарного. Мышечная деятельность стимулирует периферическое кровообращение. Наблюдается увеличение количества функционирующих капилляров, расширение

просвета сосудов, снижение тонуса артериол, уменьшение периферического сопротивления кровотоку (Stokes, 2000). Он ускоряется, активизируется венозный и лимфатический оборот, что способствует ликвидации или уменьшению отеков, уменьшает проявление недостаточности кровообращения, облегчает работу сердца (Lacroix, 2016). Значительное место в продвижении крови к сердцу, облегчении его работы в обеспечении нормальной циркуляции крови по большому и малому кругам занимают внесердечные (экстракардиальные) факторы кровообращения, действие которых усиливается при физических упражнениях (Folkerts, 2007). Ритмические сокращения и расслабления мышц, поочередные изменения внутрибрюшного и внутригрудного давления за счет движений диафрагмы во время дыхания и присасывающее действие грудной клетки способствуют снабжению крови к сердцу, полноценному наполнению кровью предсердий и эффективной систоле (Shimbo, 2016). Следствием этого является активизация гемодинамики и кровоснабжения органов и тканей (Hansson, 2010). Физические упражнения повышают приспособительные возможности организма, его сопротивляемость к стрессу и устраняют некоторые факторы риска, улучшают психоэмоциональное состояние пациентов, придают уверенности в своих силах и выздоровлении. В результате систематических тренировок усиливается функция регулирующих систем, их способность координировать деятельность сердечно-сосудистой, дыхательной, мышечной и других систем организма во время физических нагрузок, что повышает способность выполнять бытовую и профессиональную работу. Они тренируют сосуды и терморегуляционные механизмы, приспособляют и уменьшают реакцию сердечно-сосудистой системы и организма в целом на изменения в атмосфере (Paniagua, 2006).

Модель описания структуры оператора динамических систем должна отвечать таким требованиям (Lesinski, 2015):

- быть простой;
- содержать мало произвольных или уточняющих элементов;
- согласовываться со всеми существующими наблюдениями и объяснять их в рамках теории линейных динамических систем;
- давать детальное предсказание результатов будущих наблюдений, которые могут опровергнуть эту модель или доказать ее ложность, если предсказания, сделанные по этой модели, не подтверждаются.

Материалы и методы исследования

Множество работ посвящены решению задачи анализа структуры динамического объекта: с учетом стохастического подхода к анализу выходных сигналов и без учета случайных составляющих выходного сигнала на основании линейных отображений множества линейных пространств, то есть теоретико-множественный подход (Ageberg, 2003).

Поставленную задачу нахождения структуры динамического объекта по исходному сигналу исследуют методом факторизации корреляционной матрицы исходного сигнала (Wang, 2006). Методы, которые использовались ранее, относятся к обратным задачам исследования динамических систем, сущность которых заключается в том, что наблюдаемый выходной сигнал является решением динамического оператора объекта, а структура самого оператора не известна (Slobounov, 2006). При этом есть некоторые предположения о его классе: линейный дифференциальный, нелинейный дифференциальный и дифференциальный в частных производных и другие (Freund, 1979).

Эвристический подход основывается на том, что входной сигнал действует на объект, при этом осуществляется сбор информации о все степени свободы динамического неуправляемого объекта (Рахян, 2003). Таким входным сигналом, имеющим бесконечный спектр, является белый шум (Boada, 2017). Необходимо рассмотреть методику нахождения структуры оператора и оценку его параметров для линейного случая и метод идентификации модели многомерной динамической системы (Swanson, 2018).

Рассмотрим методику нахождения структуры оператора и оценку его параметров для линейного случая на относительно простом примере (McHugh, 2007).

Пусть сигнал $y_o(t)$ выхода автономного объекта описывается обычным дифференциальным уравнением m -го порядка с постоянными коэффициентами и устойчивой точкой покоя $y_o(0)$

$$\frac{d^m y_o(t)}{dt^m} + \sum_{m=0}^{m-1} a_m \frac{d^m y_o(t)}{dt^m} = 0 \quad (1)$$

с исходными условиями

$$\left\{ \frac{d^m y_o(0)}{dt^m} \right\}, m = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Предположив, для простоты, что уравнение (1) не имеет кратных корней, получим решение

$$y_o(t) = \sum_{i=1}^m C_i \exp(r_i t), \quad t \leq 0 \quad (2)$$

Характеристический полином уравнения (1)

$$a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (3)$$

где r_i – корни уравнения (1).

Уравнение (3) отражает структуру линейного оператора (1) и устанавливает взаимосвязь между множеством корней r_i и вектором коэффициентов $[a_0, a_1, \dots, a_m]$.

С другой стороны, при каждом наборе корней имеем m равенств:

$$\sum_{i=1}^m C_i r_i^{m-1} = y_o^{(m-1)}, \quad m = 0, 1, \dots, m-1$$

что однозначно связывает векторы $[C_1, C_2, \dots, C_m]$ и $[y_o^{(0)}, y_o^{(1)}, \dots, y_o^{(m-1)}]$.

Каждая запись сигнала $y_o(t)$ позволяет найти только те значения r_i , для которых в соответствии с начальными условиями коэффициенты C_i окажутся отличными от нуля. Целью является вычисление коэффициентов a_i по записям $y_o(t)$, поэтому можно учитывать, что каждый из векторов $[y_o^{(0)}, y_o^{(1)}, \dots, y_o^{(m-1)}]$, для которого все $C_i \neq 0$, позволяет без дополнительных возбуждений исследовать объект, то есть одно такое начальное отклонение реализует полный набор возбуждений объекта. Учитывая, что взятие разности и нахождение производной являются изоморфными операциями, то можно перейти от уравнения (1) к разностным уравнениям регрессии путем преобразования выходного сигнала объекта с помощью операции квантования по времени (с учетом теоремы Котельникова) и квантования по уровню временных рядов.

Изоморфизм моделей линейных дифференциальных уравнений и регрессионных уравнений может быть обеспечен при выполнении для рядов конечных разностей четырех условий Гаусса-Маркова (Walker, 2007). Если конечные разности i -го порядка не удовлетворяют требованиям случайности i -х разниц: их нормальному закону распределения, равенства нулю их среднего значения и отсутствия существенных корреляций, то необходимо перейти к $[i-1]$ -х конечных разностей (то есть уравнение регрессии более высокого порядка и вновь проверить условия Гаусса-Маркова (Duong, 2004). Кроме того, полученные числовые ряды на каждом шаге необходимо проверять на наличие ошибок (первого и второго рода) методами Ирвина, по критерию Фишера, Фостера-Стьюарта и при отсутствии грубых ошибок для увеличения точности оператора модели структуры объекта провести сглаживание временного ряда y_1, y_2, \dots, y_n .

Результаты и обсуждение

Для получения оценок коэффициентов характеристического полинома (уравнение (3)) и определения его порядка необходимо выполнить следующие операции:

1) Найти:

1-е разницы $u_i^{[1]} = y_i - y_{i-1}$

2-е разницы $u_i^{[2]} = u_i^{[1]} - u_{i-1}^{[1]}$

...

k -е разности $u_i^{[k]} = u_i^{[k-1]} - u_{i-1}^{[k-1]}$.

2) Для всех разностных рядов, предварительно проверив их на выполнение условий Гаусса-Маркова, найти их дисперсии:

– для исходного сглаженного ряда

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n-1} \quad (4)$$

– разностных рядов k -го порядка $k = 1, 2, \dots$

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{i=k+1}^n \left[u_i^{[k]} \right]^2}{n-k} C_{2k}^k \quad (5)$$

где C_{2k}^k – биномиальные коэффициенты.

3) определить порядок регрессионного уравнения путем сравнения $|\sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2|$ с $0,1\sigma_{k-1}^2, 0,05\sigma_{k-1}^2, 0,01\sigma_{k-1}^2$ (в зависимости от заданной точности); если эта величина превышает заданную точность аналого-цифрового преобразователя, то $m = k-1$ определяет порядок дифференциального оператора (1) – его характеристического полинома (модель структуры объекта) и соответствующих регрессионных уравнений

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \quad (6)$$

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m характеристического полинома определяются из решения системы нормальных уравнений, например, для $m = 3$:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + a_3 \sum t^3 &= \sum y_t \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + a_3 \sum t^4 &= \sum y_t t \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 + a_3 \sum t^5 &= \sum y_t t^2 \\ a_0 \sum t^3 + a_1 \sum t^4 + a_2 \sum t^5 + a_3 \sum t^6 &= \sum y_t t^3 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (7)$$

где Δ – определитель системы (7); $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – соответствующие определители, в которых первый, второй, третий, четвертый столбцы в определителе Δ заменены столбцом

$$\begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum y_t t \\ \sum y_t t^2 \\ \sum y_t t^3 \end{pmatrix}^T$$

и характеристическое уравнение дифференциального оператора (1) имеет вид

$$a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad (8)$$

Используя метод Лобачевского-Греффе можно оценить корни r_1, r_2, r_3 характеристического уравнения дифференциального оператора (1) с точностью найденных коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 согласно системы нормальных уравнений (7).

В случае, когда корни характеристического полинома имеют кратность, рассматриваемая процедура может быть усовершенствована с учетом того, что при нечетном числе корней всегда есть хотя бы один действительный корень, а комплексные корни всегда встречаются как комплексно полученные числа и при отрицательности действительных частей комплексно полученных корней найденное решение будет устойчивым, кроме того, при условии, что модули всех корней $|r_i| < 1, i = 1, m$ обеспечивается асимптотическая устойчивость линейного оператора (1). Оценка структуры модели динамического оператора для линейного случая сведена к оценке структуры его характеристического полинома.

Таким образом, с использованием изоморфности моделей операторов на основе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и регрессионных разностных уравнений, найденных методом наименьших квадратов, получены системы нормальных уравнений для определения коэффициентов характеристического полинома.

При выполнении требований условий Гаусса-Маркова и проверки временных рядов на наличие (и устранение) грубых ошибок в сглаженных временных рядах разностей можно получить удовлетворительные оценки коэффициентов модели структуры динамического объекта, не регулируется, по его выходными сигналами.

Расчет корней характеристического полинома на основе метода Лобачевского-Греффе позволяет оценить устойчивость модели структуры динамического объекта.

Наиболее часто встречаются задачи идентификации оператора модели динамического объекта, выходной сигнал которого многомерный и в результате его квантования по времени и по уровню будут получены многомерные (векторные) временные ряды, на основании которых будем оценивать оператор динамической системы. Предварительно введем множество обозначений и понятий теории линейных пространств и линейных отображений: id – тождественный оператор; inj – каноническая инъекция (вложение, соответствие между множествами, при которых различным элементам множества X соответствуют различные элементы в множестве Y); dim – размерность линейного пространства; im – образ линейного пространства (область значений); ker – ядро (нуль-пространства) линейного отображения; iso – изоморфизм (линейная bijection); σ – оператор сдвига; $S \text{ mod } \sim$ – множество классов эквивалентности; $L \text{ mod } \sim$ – векторное пространство, индуцированное отношением эквивалентности; $L \oplus span\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – тогда набор $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является дополнительным базисом для подпространства L' в L .

Сюръекция – отображение между множествами X и Y $X \rightarrow Y$, при котором каждый элемент множества Y соответствует некоторому элементу множества X .

Динамическая система задается в виде тройки

$$\Sigma: [T, W, B] \quad (9)$$

где T – некоторое (бесконечный) интервал в R (R – действительная прямая R_+ – множество неотрицательных действительных чисел, Z – множество целых чисел, Z_+ – множество

неотрицательных целых чисел); $T \subset R$; W – алфавит сигналов; $B \subset W^T$ – поведение системы; T в W^T – W транспонированное.

Если S – некоторое множество, q – положительное число, то $S^q \square R^q \square S \times S \times \dots \times S$ – декартово произведение.

$R^n \square R \times R \times \dots \times R$ – декартово произведение множеств неотрицательных целых чисел.

R^n – множество n -мерных векторов – то, что получаем после квантования по времени многомерного выходного сигнала динамической системы.

W – пространство, в котором находятся значения интересующих переменных, и через которое система взаимодействует со своей внешней средой. Элементы с W описывают характерные свойства (атрибуты) динамической системы.

B – поведение системы, состоит из тех траекторий $W : T \rightarrow W \rightarrow$ (знак отображения), которые совместимы с законами, управляющими динамической системой.

Приведенное определение обобщает привычное понятие системы типа «вход-выход», а B – множество всех траекторий системы типа «вход-выход».

Рассматривается класс динамических моделей M , состоящий из внешних поведений конечномерных линейных стационарных систем с пространством внешних сигналов R^q ; каждый элемент из M определяется двумя целыми числами m и n и четырьмя матрицами:

$$\begin{aligned} A' &\square R^{n \times n} \\ B' &\square R^{q \times m} \\ C' &\square R^{n \times m} \\ D' &\square R^{q \times n} \end{aligned} \quad (10)$$

которые задают внешнее поведение системы, которая имеет вид (при условии, что динамическая система может быть описана линейными дифференциальными (или разностными) уравнениями)

$$\begin{aligned} \sigma \bar{x} &\square A' \bar{x} \square B' \bar{u} \\ \bar{w} &\square C' \bar{x} \square D' \bar{u} \end{aligned} \quad (11)$$

где \bar{x} – вектор состояния системы; \bar{u} – вектор входа – вектор управления; σ – оператор сдвига. Поведение системы имеет четкое теоретико-множественное определение:

$$B_s \square A', B' C', D' \square \Lambda \square \bar{w} : T \rightarrow R^q \mid \exists \bar{x} : T \rightarrow R^n, \bar{u} \rightarrow R^m, \square s \square \quad (12)$$

где \exists – квантор существования; уравнения $\square s \square$ определяют множество полиномов $p, p \in R \square s \square$; s – неизвестная переменная.

Аналогично $R^n \square s \square$ – множество векторных полиномов с коэффициентами в R^n , а $R^{n_1 \times n_2} \square s \square$ – множество (матричных) полиномов с коэффициентами в $R^{n_1 \times n_2}$. Если полином

$$p_n s^n \square p_{n-1} s^{n-1} \square \dots \square p_0 \square; p \in R \square s \square \quad (13)$$

то имеем коэффициент $p_n \neq 0$, число n называется его степенью $\partial \square p \square; n$.

Множество полиномов от положительных и отрицательных степеней s с коэффициентами из R , обозначим через $R \square s, s^{-1} \square$. Его векторные и матричные аналоги записываются в виде $R^n \square s, s^{-1} \square$ и $R^{n_1 \times n_2} \square s, s^{-1} \square$ соответственно.

Задача для (10), (11) сводится к нахождению наиболее сильной модели из класса M не опровергнутую измерением $Z \square \bar{w}$ и среди таких моделей указать одну, для которой размерность пространства состояний n и размерности m пространства управляющих входов \bar{u} будут наименьшими возможными.

Оптимальное решение возможно получить в математически точной постановке на теоретико-множественном уровне с использованием ганкелевых матриц.

Модель «вход – пространство состояний – выход» базируется на основных свойствах линейных операторов.

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B \square T^{-1}AT$ где T – некоторая не особенная матрица, называются подобными. Таким образом, две матрицы, соответствующие одному оператору в линейном пространстве R при различных базисах подобны между собой, причем матрица T , которая связывает эти матрицы, совпадает с матрицей преобразования координат при переходе от первого базиса ко второму. Другими словами, линейному оператору в R соответствует целый класс подобных между собой матриц; эти матрицы представляют данный оператор в различных базисах. Две подобные матрицы имеют всегда равные определители, то есть

$$|B| \square |T|^{-1} |AT| \square |A| \quad (14)$$

Равенство $|B| \square |A|$ является необходимым, но не достаточным условием подобия.

Для того чтобы две матрицы $A \square a_{ik}^n$ и $B \square b_{ik}^n$ были подобны $B \square T^{-1}AT$, необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же инвариантные многочлены, или одни и те же элементарные делители в числовом поле K .

Пусть матрица $A \square \square \lambda \square$ (λ – корень характеристического полинома, имеет ранг r , поскольку в этой матрице неравные тождественно нулю миноры r -го порядка, в той время как все миноры порядка больше r равны нулю тождественно относительно λ). Обозначим через $D_j \square \square \lambda \square$ наибольший общий делитель всех миноров j -го порядка матрицы $A \square \square \lambda \square$ $j \square 1, 2, \dots, r$. Тогда в ряду

$$D_r \square \square \lambda \square, D_{r-1} \square \square \lambda \square, \dots, D_1 \square \square \lambda \square, D_0 \square \square \lambda \square \square 1 \quad (15)$$

каждый многочлен делится без остатка на следующий. Соответствующие частицы обозначим как $i_1 \square \square \lambda \square, i_2 \square \square \lambda \square, \dots, i_r \square \square \lambda \square$.

$$i_1 \square \square \lambda \square \square \frac{D_r \square \square \lambda \square}{D_{r-1} \square \square \lambda \square}, i_2 \square \square \lambda \square \square \frac{D_{r-1} \square \square \lambda \square}{D_{r-2} \square \square \lambda \square}, \dots, i_r \square \square \lambda \square \square \frac{D_1 \square \square \lambda \square}{D_0 \square \square \lambda \square} \square D_1 \square \square \lambda \square \quad (16)$$

Многочлены $i_1 \square \square \lambda \square, i_2 \square \square \lambda \square, \dots, i_r \square \square \lambda \square$ называются инвариантными многочленами прямоугольной матрицы $A \square \square \lambda \square$.

Для дальнейших доказательств рассмотрим некоторые частные типы линейных операторов в R : оператор I в R называется инволютивным, если $J^2 \square E$ (где E – единичная матрица). Инволютивному оператору в любом базисе соответствует инволютивная матрица J . Инволютивный оператор неособенный, то есть $J^{-1} \square J$.

Оператор P в R является проекционным, если $P^2 \square P$.

Пусть дано произвольное расщепление пространства R на два подпространства S и T : $R \square S \square T$. Тогда для любого вектора $\bar{x} \in R$ имеет место разложение $\bar{x} \square \bar{x}_S \square \bar{x}_T$, где $\bar{x}_S \in S$, $\bar{x}_T \in T$.

Вектор \bar{x}_S является проекцией вектора \bar{x} на подпространство S параллельно подпространству T . Аналогично вектор \bar{x}_T – проекция вектора \bar{x} на подпространство T параллельно подпространства S .

Рассмотрим оператор P , осуществляющий проектирование пространства R на подпространство S параллельно подпространству T , т. е. оператор в R определяется равенством $P\bar{x} \square \bar{x}_S$ для любого вектора $\bar{x} \in R$. Очевидно этот оператор является линейным, но он есть проективный, поскольку $P\bar{x} \square \bar{x}_S, P^2\bar{x} \square P\bar{x}_S$ и, следовательно, $[P^2 - P]\bar{x} \square \bar{x}_S - \bar{x}_S \square 0$, т. е. $P^2 \square P$.

Можно проверить и обратное утверждение. Произвольный проекционный оператор P в R осуществляет проектирование всего пространства R на подпространство $S \square PR$ параллельно подпространства $T \square [E - P]R$. Любая натуральная степень проекционного оператора является проекционным оператором. Если P – проекционный оператор, то $E - P$ – проекционный оператор, поскольку

$$[E - P]^2 \square E - 2P \square P^2 \square E - P \tag{17}$$

Квадратная матрица P будет проекционной, если $P^2 \square P$. Очевидно, в произвольном базисе проекционному оператору соответствует проекционная матрица. Для нахождения оператора динамической системы на основе экспериментальных данных (в виде векторных временных рядов, полученных в результате обработки выходных сигналов исследуемой системы) произведем их упорядочение в виде ганкелевых квадратичных форм и соответствующих им ганкелевых матриц.

Для получения модели, имеющей вид «вход – пространство состояний – выход» (модели с памятью), рассмотрим раскладываемость матричного оператора в модели пространства состояний $[A, B, C, D]$. Здесь A – матрица коэффициентов системы, B – матрица управления, C – матрица выхода, D – матрица обхода (устанавливает непосредственную зависимость выходных данных от входных переменных).

Пусть в результате обработки выходных сигналов полученные $2n - 1$ числа (или векторов в случае многомерного выходного сигнала динамической системы) $s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}$. Составим симметричную ганкелевую матрицу $S \square s_{i \square k}^{n-1}$, в развернутом виде она имеет вид:

$$S \square \begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{matrix} \tag{18}$$

Последовательные главные миноры матрицы S будем обозначать D_1, D_2, \dots, D_n :

$$D_p \square |s_{i \square k}|_0^{n-1}$$

Основные результаты Фробениуса относительно ранга ганкелевых действительных матриц: если в ганкелевой матрице $S \square |s_{i \square k}|_0^{n-1}$ первые h строк линейно зависимы, то $D_h \neq 0$.

Матрица, состоящая из первых h строк $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h$ матрицы S

$$\begin{matrix}
 s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\
 s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 s_{h-1} & s_h & s_{h+1} & \cdots & s_{h+n-2}
 \end{matrix} \quad (19)$$

имеет ранг h . С другой стороны, любой столбец этой матрицы линейно выражается через h предыдущих столбцов, но тогда, поскольку ранг матрицы (19) равен h , эти первые h столбцов матрицы (19) должны быть линейно независимы, т. е. $D_h \neq 0$.

Для рассмотрения вопроса разложимости ганкелевых матриц с целью удобства доказательства их разложимости и получения на этой основе представления модели в пространстве состояний $[A, B, C, D]$ обозначим элементы прямоугольной матрицы (19) как a_{ik} с двумя индексами, где i – нумерация по строкам, k – нумерация по столбцам, т. е. перейдем от матрицы S к совпадающей по размерности матрице $A \square a_{ik}^n \ [i \square 1, 2, \dots, m; k \square 1, 2, \dots, n]$. Исходя из алгоритмов обработки выходных сигналов динамического объекта значения элементов матриц (18) и (19) будут неотъемлемыми $a_{ik} \geq 0$ или положительными $a_{ik} \square 0$.

Матрица $A \square a_{ik}^n$ будет разложимой, если она может быть приведена к виду

$$\tilde{A} \square \begin{matrix} B & 0 \\ C & D \end{matrix} \quad (20)$$

где B и D – квадратные матрицы.

Это возможно тогда и только тогда, когда возможно некоторое разбиение всех ее индексов $1, 2, \dots, n$ на две дополнительные системы (без общих индексов) $i_1, i_2, \dots, i_\alpha; k_1, k_2, \dots, k_\nu \ [v \square v \square n \ a_{i_\alpha k_\beta} \square 0 \ \alpha \square 1, 2, \dots, \alpha; \beta \square 1, 2, \dots, \nu]$. В противном случае матрица A будет неразложимой. Под перестановкой рядов в квадратной матрице $A \square a_{ik}^n$ понимается соединение перестановки строк с такой же перестановкой столбцов матрицы A .

Пусть матрица $A \square a_{ik}^n$ соответствует линейному оператору в n -мерном векторном пространстве R векторов выхода динамической системы) с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Перестановка рядов соответствует перенумерации базисных векторов, то есть перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{e}'_1 \square \vec{e}_{j_1}, \vec{e}'_2 \square \vec{e}_{j_2}, \dots, \vec{e}'_n \square \vec{e}_{j_n}$, где (j_1, j_2, \dots, j_n) некоторая перестановка индексов $1, 2, \dots, n$. При этом матрица A переходит в подобную ей матрицу $\tilde{A} \square T^{-1}AT$ (в каждой строке и каждом столбце преобразующей матрицы T один элемент равен единице, а все остальные элементы равны нулю).

Под ν -мерным координатным подпространством в R будем понимать любое подпространство в R с базисом $\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \dots, \vec{e}_{k_\nu} \ [1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_\nu \leq n]$. С каждым базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, пространства R связаны C_n^ν ν - мерных координатных подпространств. C_n^ν – биномиальный коэффициент:

$C_n^\nu \square \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$. Тогда матрица $A \square a_{ik}^n$ разложена в том и только в том случае, если соответствующий этой матрице оператор A имеет ν -мерное инвариантное координатное подпространство $\nu \square n$. Отсюда следует, что если A разложенная матрица, то перестановкой рядов она может быть представлена в виде (20), и, если $|A| \geq 0$ и в определителе характеристическому

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & r - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (21)$$

любой из главных миноров равен нулю (матрица A разложенная), тогда превращается в ноль любой «всеобъемлющий» главный минор i , в частности, один из главных миноров $(n-1)$ -го порядка $B_{11}, B_{22}, \dots, B_{nn}$. Матрица $|A| \geq 0$ является разложенной в том и только в том случае, когда в одном из соотношений $B_{ii} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ есть знак равенства. На этом обосновании строим модель динамической системы.

После введения основных свойств линейных операторов уточним фундаментальное понятие теории динамических систем – понятие состояния, которое чрезвычайно важно с практической точки зрения в теории принятия решений и обработки сигналов.

Система с пространством состояний представляет собой четверку

$$\sum_i \{T, W, X, B_i\} \quad (22)$$

где $T \subset R$ – множество моментов времени; W – алфавит внешних сигналов; X – пространство состояний; $B_i \subset W \times X^T$ – множество внутренних состояний.

Предполагается, что B_i удовлетворяет аксиоме состояния

$$\{\vec{w}_k, \vec{x}_k\} \in B_i, k = 1, 2, t_0 \in T, \vec{x}_1 \uparrow_{t_0} \vec{x}_2 \uparrow_{t_0} \rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{x}_1\} \wedge \{\vec{x}_2, \vec{x}_2\} \in B_i \quad (23)$$

где \vec{w}_k – векторы выходных сигналов динамического объекта; \uparrow_{t_0} – знак конкатенации.

Из аксиомы состояния следует, что любая траектория, которая приходит в некоторое состояние, совместима с любой другой траекторией, выходящей из этого же самого состояния. Иначе говоря, в теоретико-множественном смысле для заданного в данный момент состояния прошлое и будущее условно независимые, то есть это состояние расщепляет прошлое и будущее поведения системы. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \sigma \vec{x} &= A' \vec{x} + B' \vec{u} \\ \vec{w} &= C' \vec{x} + D' \vec{u} \end{aligned} \quad (24)$$

Она определяет динамическую систему с пространством состояний, в которой σ – оператор сдвига во времени, $T \subset Z$ или Z – множество моментов времени (дискретное или непрерывное), $Z \geq 0$.

$W \subset R^q, X \subset R^n$ и $B = \{A', B', C', D'\} \times \{ \vec{w}, \vec{x} \} : T \rightarrow R^q \times R^n \mid \exists \vec{u} : T \rightarrow R^m$ такое, что выполняется (24). Ее внешнее поведение $B_s = \{A', B', C', D'\} : R -$ числовая (проквантованная или непрерывная); R^q, R^n, R^m – соответствующие q, n, m -мерные линейные пространства; знак $:=$ – равно по определению; \otimes – декартово произведение множеств (пространств).

Поставленная задача заключается в нахождении модели динамического объекта по результатам измерений его выходных сигналов, которые после обработки представляют векторные временные ряды. В качестве элемента класса моделей, объясняющего полученное множество наблюдений и являющегося наименьшим среди возможных, найдем наиболее сильную неопровержимую модель. Исходя из наблюдаемого векторного временного ряда определим алгоритмы вычисления сильнейшей

неопровержимой модели. Для решения этого разработана теория реализации на основе усеченного поведения. Сформулируем поставленную задачу: для полученного в результате обработки наблюдений за динамическим объектом q -мерного временного ряда $\vec{w}(t_0), \vec{w}(t_0+1), \dots, \vec{w}(t_1)$ $-\infty \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$ $\vec{w}(t) \in R^q$ найти динамическую модель объекта, объясняющего наведение наблюдения.

В общем случае, методический подход к построению алгоритмов, которые адекватно представляют модель и учитывают ранее заявленные требования к линейности, упорядоченности, законам сохранения, разложенности операторов, заключается в задании некоторого определенного набора уравнений, содержащих пока минимальный набор параметров с минимальным набором ограничений. Однако, прежде чем создавать алгоритм для получения оптимальных (приближенных) моделей с учетом препятствий, целесообразно построить алгоритм с учетом только рассмотренных структурных свойств линейных операторов для реализации точных моделей.

Класс моделей M состоит из всех линейных подпространств векторного пространства исходных параметров динамического объекта. Конкретная модель M_1 заданного явления (функционирования динамического объекта) будем считать сильнее чем модель M_2 , если $M_1 \subset M_2$. При этом будем рассматривать только прямые измерения атрибутов самого явления. Предположим, что явление S нужно моделировать на основе измерений $Z \subset S$ в заданном классе моделей $M \subset 2^S$. Предпочтение в выборе модели M отдадим той, что не противоречит Z и дает лучшие предсказания. Она является наиболее сильной неопровержимой моделью. С математической точки зрения, она не мажорируется в M , если есть импликация $Z \subset M' \subset M, M' \subset M \rightarrow M' \equiv M$.

Модель M_Z^* является наиболее сильной из класса моделей M , основанной на измерениях Z , если

$$Z \subset M_Z^* \in M, Z \subset M \subset M \rightarrow M_Z^* \subset M \quad (25)$$

Это возможно, когда семейство моделей $M \subset 2^S$ имеет свойство пересечения, то есть

$$M' \subset M \rightarrow \left\{ \Delta_{M \in M'} \subset M \right\} \quad (26)$$

и что для каждого $Z \in L \in 2^S$ существует наиболее сильная неспростая модель M_Z^* в M классе моделей M , которая основывается на измерениях Z . Это исходит из следующего обоснования.

При $T \in T_0$ или Z рассмотрим систему $\Sigma(T, R^q, B)$. Тогда полиномиальная матрица R , такая, что $\Sigma \in \Sigma(R)$, существует в том и только в том случае, когда система Σ линейная, стационарная и полная, то есть в том и только в том случае, когда ее поведение B линейное, инвариантное относительно сдвига и замкнуто в топологии потоковой сходимости пространства $[R^q]^T$ (пространства q -мерных временных рядов). Это самая четкая из возможных характеристик этого класса систем: нужно, чтобы поведение $B \subset [R^q]^T$ было линейным, инвариантным относительно сдвига $[\sigma B \subset B, T \in Z, \sigma B \subset B, Z]$, и полным в топологии поточной сходимости, где σ – оператор сдвига.

После приведенного обоснования можно приступить к решению поставленной задачи нахождения модели динамического объекта по его выходным сигналам.

Выходные сигналы динамического объекта $\bar{w}(t)$ после обработки измерительной системой будут многомерными временными рядами: $\bar{w}(0), \bar{w}(1), \dots, \bar{w}(t)$ в 1-ом случае дискретного времени $T \in Z$ и $\bar{w}(-1), \bar{w}(0), \bar{w}(1), \dots, \bar{w}(t)$ во 2-ом случае $T \in Z$.

На их основании для структурного упорядочения информации построим бесконечные векторные ганкелевые матрицы.

$$H_1[\bar{w}] = \begin{pmatrix} \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t') & \dots \\ \bar{w}(1) & \bar{w}(2) & \dots & \bar{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \bar{w}(t) & \bar{w}(t+1) & \dots & \bar{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (27)$$

$T \in Z$

или в случае $T \in Z$

$$H_1[\bar{w}] = \begin{pmatrix} \dots & \bar{w}(-1) & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t') & \dots \\ \dots & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \bar{w}(2) & \dots & \bar{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \bar{w}(t-1) & \bar{w}(t) & \bar{w}(t) & \dots & \bar{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (28)$$

На основании (27), (28) построим разбитую на блоки (бесконечную в четырех направлениях) ганкелевую матрицу для ряда $w(t): Z \rightarrow R^q$

$$\left(\begin{array}{c} H_1[\bar{w}] \\ H_2[\bar{w}] \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \bar{w}(-t-1) & \bar{w}(-t) & \dots & \bar{w}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \bar{w}(t-2) & \bar{w}(t-1) & \dots & \bar{w}(t') & \dots \\ \dots & \bar{w}(t-1) & \bar{w}(t) & \dots & \bar{w}(t') & \dots \\ \dots & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \bar{w}(t-1) & \bar{w}(t) & \dots & \bar{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (29)$$

Введем понятие относительного ранга по строкам $\text{rank}[M_1; M_2]$, разделенной на блоки бесконечной матрицы (29), представив ее в виде

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Сначала предположим, что матрица M конечна. Тогда по определению

$$\text{rank}[M_1; M_2] = \text{rank} M_1 \vee \text{rank} M_2 \vee \text{rank} M \vee \text{rank} M \quad (31)$$

и предположим далее, что матрица M имеет бесконечное число столбцов и с учетом формул (18) и (19) допустим

$$\text{rank} [M_1; M_2] \square \lim_{t \rightarrow \infty} \text{rank} [M_{1,t}; M_{2,t}] \square \text{rank} [\tilde{M}_1; \tilde{M}_2] \quad (32)$$

Здесь $M_{1,t}$ обозначает матрицу, полученную из M_1 в результате ограничения ее по столбцу с

номером t , а $\tilde{M} \square \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix}$ – подматрицу максимального ранга в M .

Введенное определение очевидным образом распространяется на случай матрицы с бесконечным в обе стороны числом столбцов. В результате получаем

$$\text{rank} [M_1; M_2] \square \text{sup}_{t \rightarrow \infty} \text{rank} [M_1'; M_2'] \quad (33)$$

то есть (33) является верхней границей относительно ранга по всем подматрицам M_1 и M_2 , полученным в результате вычеркивания любого числа строк в M_1, M_2 .

Доказано, что $\text{rank} [H_{-} \bar{w}; H_{+} \bar{w}] \square \infty$ и он равен размерности минимального представления с пространством состояний $\Sigma_s [A', B', C', D']$ наиболее сильной неопровержимой (AR)-модели $B [R_w^*]$ временного ряда \bar{w} (здесь (AR) – авторегрессионная модель). Для полученного в результате обработки наблюдаемого временного ряда $\bar{w}: Z \rightarrow R^q$ и построенной для системы (24) матрицы $M \in R^{[n \times q \times \infty \times n \times m]}$, которая задает отображение

$$M : \begin{pmatrix} \bar{x} [t] \\ \bar{u} [t] \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} [t] \square 1 \\ \bar{w} [t] \end{pmatrix} \quad (34)$$

где $\bar{x} [t]$ – вектор состояния; $\bar{u} [t]$ – вектор управления; $\bar{w} [t]$ – наблюдаемый временной ряд.

Разбив матрицу M (34) на блоки

$$M : \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \quad (35)$$

так, что $A' \square R^{n \times n}, B' \square R^{n \times m}, C' \square R^{q \times n}, D' \square R^{q \times m}$, получим модель динамического оператора $\Sigma [A', B', C', D']$, которая является наиболее сильной неопровержимой моделью с минимальным пространством состояний и минимальным числом входов m для временного ряда $\bar{w} [t]$. Обоснуем эти решения, наделив линейные операторы необходимыми дополнительными свойствами: сюръективным соответствием (отражением) между множествами, при котором каждый элемент одного множества соответствует некоторому элементу другого множества и биективным отображением – взаимно однозначным соответствием, являющимся одновременно однозначным, инъективным (при котором различным элементам из первого множества соответствуют различные элементы другого), и сюръективным.

Пусть измерительной системой зафиксирован неизвестный сигнал, который после обработки имеет вид временного ряда $\bar{w} [-1], \bar{w} [0], \bar{w} [1], \dots, \bar{w} [t]$. Такие сигналы могут иметь различную физическую природу: электромагнитную, гравитационную, акустическую, оптическую, биологическую, социальную, зафиксировав которые, найти возможно в линейном приближении модель объекта, его генерирующего. Условием для решения этой обратной задачи является наличие линейной соответствия с временем, расстоянием, давлением и т.д., с одинаковой топологией и совпадением начальных (граничных) условий.

При разработке метода сначала определим основную идею, а потом она будет приведена в систематическую процедуру, которую можно применять почти механически. Однако получаемый метод

включает только стандартные методы линейной алгебры, его нельзя представлять как численные процедуры, поскольку здесь не учитывается численная устойчивость, робастность, вычислительная сложность.

Имеем исходные данные $\vec{w}_{-1}, \vec{w}_0, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_t$.

1. Определяем структуру в матрице (30) $H_{\vec{w}}$.

Для этого введем такие матрицы H_-, H_+ (где H_- – составлена из строк матрицы $H_{\vec{w}}$, H_+ – из строк матрицы $H_{\vec{w}}$, что $\text{rank}[H_-, H_+] = \text{rank}[H_{\vec{w}}; H_{\vec{w}}] = n$

Определяем запаздывания. Из ганкелевой структуры следует что для $t \in Z_+$ выражения

$$\begin{aligned} \rho_t &:= \text{rank} H_t[\vec{w}] - \text{rank} H_{t-1}[\vec{w}] \\ \rho_0 &:= \text{rank} H_0[\vec{w}] \end{aligned} \quad (36)$$

определяют невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел.

Теперь вычислим t' , что $\rho_t \leq \rho_{t'}$, для $t \leq t'$. В результате получим соответствующие матрицы, остановившись на $q[t'] \times 1$ нижних строках в $H_{\vec{w}}$ и $q[t'] \times 1$ верхних строках в $H_{\vec{w}}$.

Далее определим матрицу $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, состоящую из такого количества столбцов, что столбцы $\text{col}[H_1, H_2]$ порождают линейное пространство, натянутое на столбцы матрицы H . Естественно, что ранг матрицы $H = \text{rank}[H_1; H_2] = n$.

2. Определяем пространство состояний: вычислим ядро (ker) матрицы H_1 и допустим $N = H_2 \text{ker} H_1$.

Размерность (dim) ядра линейного оператора (матрицы) совпадает с размерностью ее спектра набором корней характеристического полинома. Отметим, что размерность области значений H_2 по модулю H равна n , то есть

$$\dim[\text{im} H_2 \text{ mod } H] = n \quad (37)$$

Потом примем

$$X \cong [\text{im} H_2 \text{ mod } H] \quad (38)$$

Если \sim – отношение эквивалентности на множестве S , то $S \text{ mod } \sim$ представляет собой множество классов эквивалентности; $[\text{im} H_2]$ – область значений оператора (матрицы H_2); X – пространство состояний. Примем $\vec{x}[t] \in \Delta \vec{h}_t \text{ mod } H$, где \vec{h}_t – столбец с номером t матрицы H_+ .

3. Определим пространство входных сигналов. Примем

$$\vec{f}[t] \in \Delta \text{col}[\vec{w}[t], \vec{x}[t]] \quad S \Delta \text{span}[\vec{f}[t], t \in Z_+] \quad (39)$$

Формула (39) означает, что, если L – векторное пространство и $L' \subset L$ – его подпространство, то $L \text{ mod } L'$ означает векторное пространство, индуцированное отношением эквивалентности, и

$\vec{e}_i \in L, i \in n$ – такие линейно независимые векторы, что $L' \Delta \text{span}[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] \subseteq L$; тогда набор $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ будет дополнительным базисом L' .

Очевидно, что проекция $\pi_x : S \rightarrow X$ определяется равенством $\pi_x \vec{f}(t) \Delta \vec{x}(t)$, сюръективна (такое соответствие между множествами, при котором каждый элемент одного множества соответствует некоторому элементу другого множества) – тем самым S представлена как векторное расслоение на X .

Зададим векторное пространство U и сюръективное отображение $\pi_u \Delta S \rightarrow U$ так, что $S \subseteq X \Delta U$, то есть так, что отображение $\pi \Delta [\pi_x, \pi_u]$ биективно (соответствие, являющееся одновременно однозначным, инъективным и сюръективным); инъекция – вложение, отображение – такое соотношение между множествами, при котором различным элементам из одного множества соответствуют различные элементы из другого множества.

Очевидно, что размерность $U \subseteq \dim U \subseteq \dim S - \dim X$

Примем, что $\vec{u}(t) \subseteq P_u \vec{f}(t)$, где P_u – оператор проектирования.

4. Определение параметров системы. Для $i \in [n \times m]$ введем числа t_i так, что векторы $\vec{f}(t_i)$ образуют базис пространства S . Тогда $\vec{f}(t_i) \subseteq \text{col}[\vec{x}(t_i), \vec{u}(t_i)]$ будут базисом для $X \Delta U$. Теперь определим такую $[n \times q] \times [n \times m]$ -матрицу M , что

$$M : \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \oplus 1 \\ \vec{w}(t_i) \end{pmatrix} \quad (40)$$

$\vec{w} : Z \rightarrow R^q$ – наблюдаемый временной ряд и $M \in R^{[n \times q] \times [n \times m]}$ – построенная матрица (40). Разобьем M на блоки

$$M \Delta \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \quad (41)$$

так $A' \in R^{n \times n}, B' \in R^{n \times m}, C' \in R^{q \times n}, D' \in R^{q \times m}$. Тогда система $\Sigma_S[A', B', C', D']$ является наиболее сильной неопровержимой моделью с минимальным пространством состояний и минимальным числом входов для временного ряда \vec{w} .

Таким образом, предложенный метод моделирования оператора динамической системы на основе свойств линейных операторов и упорядочения экспериментальных данных с помощью ганкелевых квадратичных форм и ганкелевых матриц, что позволяет решать обратные задачи динамики.

Заключение

Таким образом, впервые разработаны методы нахождения модели динамической системы, которая задается только выходным сигналом, и определение характеристик динамической системы в отличие от известных процессов, описанных задачами идентификации, управления и измерения.

Рассмотрены два подхода к решению поставленной задачи анализа структуры динамического объекта: с учетом стохастического подхода к анализу выходных сигналов и без учета случайных составляющих выходного сигнала на основании линейных отображений множества линейных пространств, то есть теоретико-множественный подход. В первом подходе определяется характеристический полином оператора модели динамического объекта, во втором – представление в виде оператора модели «вход – пространство состояний – выход».

Предлагаемый метод моделирования оператора динамической системы на основе свойств линейных операторов и упорядочения экспериментальных данных с помощью ганкелевых квадратичных

форм и ганкелевых матриц позволяет обсуждать решение обратных задач динамики на теоретико-множественном уровне в математически точной и согласованной постановке. Это приводит к понятию оптимальной точной модели (без учета препятствий), а именно к наиболее сильной неопровержимой модели в классе линейных систем. Такая модель объясняет наблюдения и мала насколько возможно. Ее существование вытекает из свойства сечения (26).

Линейные конечно измеряемые системы удовлетворяют наиболее сильной неопровержимой модели из-за того, что их поведение в точности соответствует замкнутым линейным инвариантным относительно сдвига подпространства в \mathbb{R}^q .

Проиллюстрирована последовательность построения модели оператора линейной динамической системы как решение обратной задачи динамики: по выходному сигналу определить структуру оператора в пространстве состояний позволяет разрабатывать вычислительные алгоритмы для реальных динамических систем в линейном приближении.

Список литературы

1. Ageberg E., Roberts D., Holmström E., & Fridén T. Balance in single-limb stance in healthy subjects - Reliability of testing procedure and the effect of short-duration sub-maximal cycling. *BMC Musculoskeletal Disorders*. 2003. № 4. Pp. 1–16. URL: <https://doi.org/10.1186/1471-2474-4-14>
2. Boada M., Anaya F., Ortiz P., Olazarán J., Shua-Haim J. R., Obisesan T. O., Páezh A. Efficacy and safety of plasma exchange with 5% albumin to modify cerebrospinal fluid and plasma amyloid- β concentrations and cognition outcomes in Alzheimer's disease patients: A multicenter, randomized, controlled clinical trial. *Journal of Alzheimer's Disease*. 2017. № 56 (1). Pp. 129–143. URL: <https://doi.org/10.3233/JAD-160565>
3. Duong T.T., Englande J., Wright, J., Cifu D.X., Greenwald B.D., & Brown A.W. Relationship between strength, balance, and swallowing deficits and outcome after traumatic brain injury: A multicenter analysis. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 2004. № 85 (8). Pp. 1291–1297. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apmr.2003.11.032>
4. Elovic E.P., Simone L.K., & Zafonte R. Outcome Assessment for Spasticity Management in the Patient with Traumatic Brain Injury: The State of the Art. *Journal of Head Trauma Rehabilitation*. 2004. № 19 (2). Pp. 155–177. URL: <https://doi.org/10.1097/00001199-200403000-00007>
5. Folkerts M.M., Parks E.A., Dedman J.R., Kaetzel M.A., Lyeth B.G., & Berman R.F. Phosphorylation of calcium calmodulin-dependent protein kinase II following lateral fluid percussion brain injury in rats. *Journal of Neurotrauma*. 2007. № 24 (4). Pp. 638–650. URL: <https://doi.org/10.1089/neu.2006.0188>
6. Freund H., Hoover Jr., H.C., Atamian S., & Fischer, J.E. Infusion of the branched chain amino acids in postoperative patients. Anticatabolic properties. *Annals of Surgery*. 1979. № 190 (1). Pp. 18–23. URL: <https://doi.org/10.1097/0000658-197907000-00004>
7. Hansson E. Long-term pain, neuroinflammation and glial activation. *Scandinavian Journal of Pain*. 2010. № 1 (2). Pp. 67–72. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sjpain.2010.01.002>
8. Lacroix A., Kressig R.W., Muehlbauer T., Gschwind Y.J., Pfenninger, B., Bruegger, O., & Granacher, U. Effects of a supervised versus an unsupervised combined balance and strength training program on balance and muscle power in healthy older adults: A randomized controlled trial. *Gerontology*. 2016. № 62 (3). Pp. 275–288. URL: <https://doi.org/10.1159/000442087>
9. Lesinski M., Hortobágyi T., Muehlbauer T., Gollhofer A., & Granacher, U. Dose-Response Relationships of Balance Training in Healthy Young Adults: A Systematic Review and Meta-Analysis. *Sports Medicine*. 2015. № 45 (4). Pp. 557–576. URL: <https://doi.org/10.1007/s40279-014-0284-5>
10. McHugh M.P., Tyler T.F., Mirabella M.R., Mullaney M.J., & Nicholas, S.J. The effectiveness of a balance training intervention in reducing the incidence of noncontact ankle sprains in high school football players. *American Journal of Sports Medicine*. 2007. № 35 (8). Pp. 1289–1294. URL: <https://doi.org/10.1177/0363546507300059>

11. Murray N., Salvatore A., Powell D., & Reed-Jones R. Reliability and validity evidence of multiple balance assessments in athletes with a concussion. *Journal of Athletic Training*. 2014. № 49 (4). Pp. 540–549. URL: <https://doi.org/10.4085/1062-6050-49.3.32>
12. Paniagua M.A., Malphurs J.E., & Phelan E.A. Older patients presenting to a county hospital ED after a fall: missed opportunities for prevention. *American Journal of Emergency Medicine*. 2006. № 24 (4). Pp. 413–417. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ajem.2005.12.005>
13. Paxian M., Keller S.A., Huynh T.T., & Clemens M.G. Perflubron emulsion improves hepatic microvascular integrity and mitochondrial redox state after hemorrhagic shock. *Shock (Augusta, Ga.)*. 2003. № 20 (5). Pp. 449–457. URL: <https://doi.org/10.1097/01.shk.0000090601.26659.87>
14. Shimbo D., Bowling C.B., Levitan E.B., Deng L., Sim J.J., Huang L., Muntner P. Short-term risk of serious fall injuries in older adults initiating and intensifying treatment with antihypertensive medication. *Circulation: Cardiovascular Quality and Outcomes*. 2016. № 9 (3). Pp. 222–229. URL: <https://doi.org/10.1161/CIRCOUTCOMES.115.002524>
15. Slobounov S., Slobounov E., & Newell K. Application of virtual reality graphics in assessment of concussion. *Cyberpsychology and Behavior*. 2006. № 9 (2). Pp. 188–191. URL: <https://doi.org/10.1089/cpb.2006.9.188>
16. Stokes I. A.F., Gardner-Morse M., Henry S.M., & Badger G.J. Decrease in trunk muscular response to perturbation with preactivation of lumbar spinal musculature. *Spine*. 2000. № 25 (15). Pp. 1957–1964. URL: <https://doi.org/10.1097/00007632-200008010-00015>
17. Swanson R.L., Hampton S., Green-McKenzie J., Diaz-Arrastia R., Sean Grady M., Verma R., Smith D.H. Neurological manifestations among US government personnel reporting directional audible and sensory phenomena in Havana, Cuba. *JAMA - Journal of the American Medical Association*. 2018. № 319 (11). Pp. 1125–1133. URL: <https://doi.org/10.1001/jama.2018.1742>
18. Van Donkelaar, P., Osternig, L., & Chou, L.S. Attentional and biomechanical deficits interact after mild traumatic brain injury. *Exercise and Sport Sciences Reviews*. 2006. № 34 (2). Pp. 77–82. URL: <https://doi.org/10.1249/00003677-200604000-00007>
19. Walker W.C., & Pickett T.C. Motor impairment after severe traumatic brain injury: A longitudinal multicenter study. *Journal of Rehabilitation Research and Development*. 2007. № 44 (7). Pp. 975–982. URL: <https://doi.org/10.1682/JRRD.2006.12.0158>
20. Wang Y., Asaka T., Zatsiorsky V.M., & Latash M.L. Muscle synergies during voluntary body sway: Combining across-trials and within-a-trial analyses. *Experimental Brain Research*. 2006. № 174 (4). Pp. 679–693. URL: <https://doi.org/10.1007/s00221-006-0513-8>

A model for monitoring the recovery of athletes as a source of the rehabilitation process

Yuri V. Zabaykin

Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department "Business Management and Service Technologies"

Rosbiotech

Moscow, Russia

8926415444@Yandex.ru

 0000-0000-0000-0000

Received 02.07.2023

Accepted 19.08.2023

Published 15.09.2023

 10.25726/g5732-9817-4823-s

Abstract

Rehabilitation of athletes after injury restricts not only their further participation in competitive activities, but also reduces the overall quality of life. In this regard, the recovery process is the most important characteristic and the construction of recovery schedules allows you to determine the most promising recovery technologies and measures that contribute to achieving previously shown results. The novelty of the study is determined by the possibilities of achieving previously shown results using the methodology of full recovery. At the same time, the authors note that in addition to physiological recovery, there is a need to achieve moral and ethical components. A component of this kind is defined as an athlete's ability to filter incoming information and reduce attention to distracting elements, which are called white noise and have not only a technical effect. The authors show that this makes it possible to shorten the recovery period and increase the timing of the athlete's performance in subsequent competitive periods. The practical significance of the study is determined by the dynamics of the athlete's recovery and the use of a model of filtering environmental information. It is determined that the monitoring structure is the solution of the input and output system, which allows for the interpretation of the necessary information.

Keywords

dynamics, athlete, recovery, structure, signal.

References

1. Ageberg E., Roberts D., Holmström E., & Fridén T. Balance in single-limb stance in healthy subjects - Reliability of testing procedure and the effect of short-duration sub-maximal cycling. *BMC Musculoskeletal Disorders*. 2003. № 4. Pp. 1–16. URL: <https://doi.org/10.1186/1471-2474-4-14>
2. Boada M., Anaya F., Ortiz P., Olazarán J., Shua-Haim J. R., Obisesan T. O., Páezh A. Efficacy and safety of plasma exchange with 5% albumin to modify cerebrospinal fluid and plasma amyloid- β concentrations and cognition outcomes in Alzheimer's disease patients: A multicenter, randomized, controlled clinical trial. *Journal of Alzheimer's Disease*. 2017. № 56 (1). Pp. 129–143. URL: <https://doi.org/10.3233/JAD-160565>
3. Duong T.T., Englande J., Wright, J., Cifu D.X., Greenwald B.D., & Brown A.W. Relationship between strength, balance, and swallowing deficits and outcome after traumatic brain injury: A multicenter analysis. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 2004. № 85 (8). Pp. 1291–1297. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apmr.2003.11.032>
4. Elovic E.P., Simone L.K., & Zafonte R. Outcome Assessment for Spasticity Management in the Patient with Traumatic Brain Injury: The State of the Art. *Journal of Head Trauma Rehabilitation*. 2004. № 19 (2). Pp. 155–177. URL: <https://doi.org/10.1097/00001199-200403000-00007>
5. Folkerts M.M., Parks E.A., Dedman J.R., Kaetzel M.A., Lyeth B.G., & Berman R.F. Phosphorylation of calcium calmodulin-dependent protein kinase II following lateral fluid percussion brain injury in rats. *Journal of Neurotrauma*. 2007. № 24 (4). Pp. 638–650. URL: <https://doi.org/10.1089/neu.2006.0188>
6. Freund H., Hoover Jr., H.C., Atamian S., & Fischer, J.E. Infusion of the branched chain amino acids in postoperative patients. Anticatabolic properties. *Annals of Surgery*. 1979. № 190 (1). Pp. 18–23. URL: <https://doi.org/10.1097/00000658-197907000-00004>
7. Hansson E. Long-term pain, neuroinflammation and glial activation. *Scandinavian Journal of Pain*. 2010. № 1 (2). Pp. 67–72. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sjpain.2010.01.002>
8. Lacroix A., Kressig R.W., Muehlbauer T., Gschwind Y.J., Pfenninger, B., Bruegger, O., & Granacher, U. Effects of a supervised versus an unsupervised combined balance and strength training program on balance and muscle power in healthy older adults: A randomized controlled trial. *Gerontology*. 2016. № 62 (3). Pp. 275–288. URL: <https://doi.org/10.1159/000442087>
9. Lesinski M., Hortobágyi T., Muehlbauer T., Gollhofer A., & Granacher, U. Dose-Response Relationships of Balance Training in Healthy Young Adults: A Systematic Review and Meta-Analysis. *Sports Medicine*. 2015. № 45 (4). Pp. 557–576. URL: <https://doi.org/10.1007/s40279-014-0284-5>

10. McHugh M.P., Tyler T.F., Mirabella M.R., Mullaney M.J., & Nicholas, S.J. The effectiveness of a balance training intervention in reducing the incidence of noncontact ankle sprains in high school football players. *American Journal of Sports Medicine*. 2007. № 35 (8). Pp. 1289–1294. URL: <https://doi.org/10.1177/0363546507300059>
11. Murray N., Salvatore A., Powell D., & Reed-Jones R. Reliability and validity evidence of multiple balance assessments in athletes with a concussion. *Journal of Athletic Training*. 2014. № 49 (4). Pp. 540–549. URL: <https://doi.org/10.4085/1062-6050-49.3.32>
12. Paniagua M.A., Malphurs J.E., & Phelan E.A. Older patients presenting to a county hospital ED after a fall: missed opportunities for prevention. *American Journal of Emergency Medicine*. 2006. № 24 (4). Pp. 413–417. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ajem.2005.12.005>
13. Paxian M., Keller S.A., Huynh T.T., & Clemens M.G. Perflubron emulsion improves hepatic microvascular integrity and mitochondrial redox state after hemorrhagic shock. *Shock (Augusta, Ga.)*. 2003. № 20 (5). Pp. 449–457. URL: <https://doi.org/10.1097/01.shk.0000090601.26659.87>
14. Shimbo D., Bowling C.B., Levitan E.B., Deng L., Sim J.J., Huang L., Muntner P. Short-term risk of serious fall injuries in older adults initiating and intensifying treatment with antihypertensive medication. *Circulation: Cardiovascular Quality and Outcomes*. 2016. № 9 (3). Pp. 222–229. URL: <https://doi.org/10.1161/CIRCOUTCOMES.115.002524>
15. Slobounov S., Slobounov E., & Newell K. Application of virtual reality graphics in assessment of concussion. *Cyberpsychology and Behavior*. 2006. № 9 (2). Pp. 188–191. URL: <https://doi.org/10.1089/cpb.2006.9.188>
16. Stokes I. A.F., Gardner-Morse M., Henry S.M., & Badger G.J. Decrease in trunk muscular response to perturbation with preactivation of lumbar spinal musculature. *Spine*. 2000. № 25 (15). Pp. 1957–1964. URL: <https://doi.org/10.1097/00007632-200008010-00015>
17. Swanson R.L., Hampton S., Green-McKenzie J., Diaz-Arrastia R., Sean Grady M., Verma R., Smith D.H. Neurological manifestations among US government personnel reporting directional audible and sensory phenomena in Havana, Cuba. *JAMA - Journal of the American Medical Association*. 2018. № 319 (11). Pp. 1125–1133. URL: <https://doi.org/10.1001/jama.2018.1742>
18. Van Donkelaar, P., Osternig, L., & Chou, L.S. Attentional and biomechanical deficits interact after mild traumatic brain injury. *Exercise and Sport Sciences Reviews*. 2006. № 34 (2). Pp. 77–82. URL: <https://doi.org/10.1249/00003677-200604000-00007>
19. Walker W.C., & Pickett T.C. Motor impairment after severe traumatic brain injury: A longitudinal multicenter study. *Journal of Rehabilitation Research and Development*. 2007. № 44 (7). Pp. 975–982. URL: <https://doi.org/10.1682/JRRD.2006.12.0158>
20. Wang Y., Asaka T., Zatsiorsky V.M., & Latash M.L. Muscle synergies during voluntary body sway: Combining across-trials and within-a-trial analyses. *Experimental Brain Research*. 2006. № 174 (4). Pp. 679–693. URL: <https://doi.org/10.1007/s00221-006-0513-8>